夯实基础

已知椭圆$\Gamma: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(1)改编自辽宁省多校调研2025-2026学年高三上学期11月联合考试

布利安桑定理是射影几何中的重要定理，由法国数学家夏尔·朱利安·布里昂雄（Charles Julien Brianchon）于19世纪初提出.其核心内容为：若一个六边形的六条边均与同一圆锥曲线相切，则该六边形的三条主对角线共点，该交点称为布列安桑点.

设Γ的切线 $l_1: y=-x+2$与Γ的切点为$A.B(0,2)$，作A关于y轴的对称点为D.点C为Γ上位于第四象限一点，过点C作Γ的切线交l_1、$l_2: y=-x-2$于Q、P，连接BP、DQ，$BP\cap DQ=R$.设R的轨迹为Ω，试求Ω的方程.

(2)改编自浙江省浦江中学等三校2026届高三第八次联考

过点$F(0,1)$的直线l(斜率存在且不为零)与Γ交于M、N两点，N关于x轴的对称点为P.

(i)求直线PM所过定点Q的坐标;

(ii)求$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{NQ}$的取值范围.

(3)改编自浙江省新阵地教育联盟2026届高三上学期第一次联考

设Γ的左、右顶点分别为M、N. 过动点$P(4,m)$作椭圆Γ的切线，切点为A，B，A在x轴上方.

(i)证明：直线AM与直线BN的斜率之比为定值;

(ii)若$m=4$，过点P作直线l交椭圆Γ于D、E两点，过D作PA的平行线，交AE于点F，DF交AB于点G，此时$DG=FG$，求满足条件的所有直线PD的斜率.

(4)改编自湖北省十一校2025届高三第二次联考

过点$F(1,0)$的斜率为$k(k>0)$直线l交Γ于B、D两点，B在x轴上方.点S，T是椭圆Γ上异于B、D的两点，SF平分$\angle BSD$，TF平分$\angle BTD$.

(i)求$\dfrac{|BS|}{|DS|}$的取值范围;

(ii)若ΔSFT外接圆的周长为9π，求直线l的方程.

拓展拔高

(5) 椭圆$C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，上顶点为$A$，若存在直线$l$与椭圆交于不同两点$B$、$C$，$\Delta ABC$的重心为$F$，求直线$l$斜率的取值范围.(圆锥曲线中弦中点和中点弦的存在性问题)

(6) 设F为双曲线$E: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点，$A$、$B$分别为双曲线$E$的左右顶点，点$P$是双曲线上异于$A$、$B$的动点，直线$l: x=t$使得过$F$作直线$AP$的垂线交直线$l$于点$Q$时总有$P$，$Q$，$B$三点共线，求$\dfrac{t}{a}$的最大值.(圆锥曲线的第三定义)

(7) 已知椭圆$C: \dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$，左焦点为$F$，在椭圆$C$上取三个点$P$、$Q$、$R$，且$\angle PFQ=\angle QFR=\angle RFP=\dfrac{2\pi}{3}$，求$\dfrac{1}{|FP|}+\dfrac{2}{|FQ|}+\dfrac{3}{|FR|}$的最小值.(焦半径)