河南省郑州市2026届高三上学期第一次质量预测(一模)

数学试题

★祝大家学习生活愉快★

注意事项:

1．答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3．考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单选题:本题共8小题,每小题5分,共40分,每小题只有一个选项符合要求

1. 设复数z在复平面内对应的点为$(-2,1)$,则复数$\frac{5}{z}$的虚部为

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

2. 已知集合$A=\{x|y=x^2\}$,$B=\{y|y=x^2\}$,则$A\cap B=$

A. $[0,+\infty)$　　B. $\varnothing$　　C. R　　D. $\{(0,0)\}$

3. 已知单调递减的等比数列$\{a_n\}$满足$a_4=12$,$a_6=3$,则$a_5=$

A. 6　　B. ± 6　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\pm\frac{1}{4}$

4. 已知圆O的直径$AB=4$,动点P与A的距离是它与B的距离的$\sqrt{2}$倍,当$\triangle PAB$面积最大时,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=$

A. 16　　B. 32　　C. 48　　D. 64

5. 已知定义域为R的函数$f(x)$满足$f(x+2)=f(-x)$,且$f(2x-1)$为奇函数,则一定有

A. $f(0)=0$　　B. $f(2)=0$　　C. $f(3)=0$　　D. $f(4)=0$

6. 已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$在$\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$上单调递增,且其图象关于直线$x=\frac{\pi}{3}$对称,则$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 过点$(0,-2)$与圆$(x-4)^2+(y-2)^2=4$相切的两条直线的夹角为α,则$\sin\alpha=$

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$

8. 在新型太空舱生命维持系统的储液罐设计中,采用一种胶囊形结构:中间部分为圆柱体,左、右两端均为半球形封头,圆柱底面半径和半球半径均为R.已知储液罐外表面积为定值S,当储液罐的体积V取最大值时$R=$

A. $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$　　B. $\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$　　C. $\sqrt{\frac{S}{4\pi}}$　　D. $\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=3\times 2^n$，设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，下列结论中正确的是

A. $a_2=5$

B. 数列 $\{a_n-2^n\}$ 是等比数列

C. $S_4=24$

D. $S_{2n}=2^{2n+1}-2$

10. 任意抛掷一枚骰子一次，观察它向上一面的点数，得到样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，若事件 $A=\{1,2,5\}$，事件 $B=\{1,3,5\}$，事件 C 满足 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，下列结论中正确的是

A. $P(A)=\dfrac{1}{2}$

B. 事件 A，B，C 两两独立

C. 当事件 $ABC=\{5\}$ 时，$P(C)=\dfrac{2}{3}$

D. 当事件 $ABC=\{1\}$ 时，事件 C 包含 10 个样本点

11. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，若 C 上存在 n 个互不重合的点 P_1，P_2，P_3，$\cdots$，P_n 满足 $\angle P_1FP_2=\angle P_2FP_3=\cdots=\angle P_{n-1}FP_n=\angle P_nFP_1=\dfrac{2\pi}{n}$，下列结论中正确的有

A. 若 $n=2$，则 $|P_1P_2|$ 的最小值为 4

B. 若 $n=2$，则 $\dfrac{1}{|P_1F|}+\dfrac{1}{|P_2F|}=\dfrac{1}{2}$

C. 若 $n=4$，则 $\dfrac{1}{|P_1F||P_3F|}+\dfrac{1}{|P_2F||P_4F|}=\dfrac{1}{4}$

D. 若 $n=4$，则 $|P_1P_3|+|P_2P_4|$ 的最小值为 16

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分

12. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{m}-y^2=1$ 的一条渐近线为 $x-\sqrt{3}\,y=0$，则 C 的焦距为______.

13. $(x^2+x+y)^6$ 的展开式中 x^5y^3 项的系数是______.

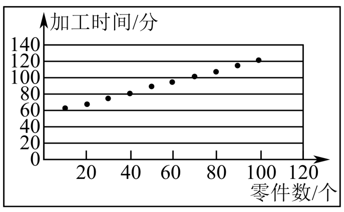
14. 已知棱长为 $\sqrt{3}$ 的正四面体 $P-ABC$ 的外接球球心为 O，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{EB}$，过点 E 作球 O 的截面，若截面面积为 $\dfrac{13}{16}\pi$，则直线 OE 与该截面所成的角的正弦值为______.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

15. 某车间为了规定工时定额，需要确定加工零件所花费的时间，为此进行了 10 次试验，收集数据如下：

零件数/个	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
加工时间/分	62	68	75	81	89	95	102	108	115	122

根据样本数据，画出加工时间与加工零件个数的散点图，如图所示，散点大致分布在一条从左下角到右上角的直线附近，表明两个变量线性相关，因此可以用一元线性回归模型刻画加工时间与加工零件个数之间的关系.(运算结果保留小数点后两位数字)



(1) 请求出加工时间 y 关于零件数 x 的经验回归方程；

(2) 该车间实行“按时计件”工资制度：若工人完成一个零件的平均时间低于标准时间，则可获得额外奖励. 已知目前每个零件的标准加工时间定为1.2分钟，根据上述回归方程判断：

(i) 对于120个零件的任务，预测加工时间是否低于现行标准加工时间？(标准加工时间为 $120\times1.2=144$ 分钟)

(ii) 若工人的实际加工能力与回归模型基本一致，车间是否应考虑调整标准时间？若需调整应调整到多少比较合适？

附：参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{10}x_i=550$，$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i=917$，$\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i=55950$，$\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2=38500$.

对于一组数据 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots$，(x_n,y_n)，其经验回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

16. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\tan B\tan C=\tan B+\tan C+1$，$a=\sqrt{6}$，$c=3$.

(1) 求角 C；

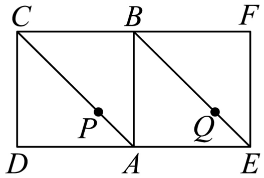
(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$，求 $\triangle NBC$ 的面积.

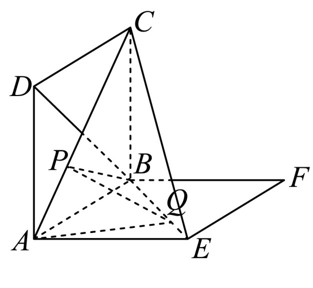
17. 如图，在矩形 $CDEF$ 中，$CD=1$，$DE=2$，A，B 分别是 DE，CF 的中点，点 P，Q 分别是对角线 AC，BE 上的动点(不包括端点)，且 $CP=BQ=a(0<a<\sqrt{2})$，将四边形 $ABCD$ 沿 AB 翻折，使平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABFE$.

(1) 求证：$BD\perp$ 平面 AEC；

(2) 求线段 PQ 的长(用 a 表示)；

(3) 当线段 PQ 的长最小时，求平面 PQA 与平面 AEC 夹角的余弦值.





18. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$，左、右焦点分别为 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 若椭圆 C 的左顶点为 A，下顶点为 B，P 是椭圆 C 在第一象限上的一点，直线 PB 与 x 轴相交于点 C，直线 PA 与 y 轴相交于点 D.

(i) 求证：四边形 $ABCD$ 的面积为定值；

(ii) 求 $\triangle PCD$ 面积的最大值.

19. 已知函数 $f(x)=a\ln x-2x+2a(a\in R)$.

(1) 当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求实数 a 的取值范围；

(3) 设 $g(x)=ax-2e^x+2a$，若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 共有 4 个不同的零点，是否存在实数 a，使得这 4 个零点在调整顺序后成等差数列，若存在，求出 a 的值；若不存在，请说明理由.

参考答案

1. B

【解析】由题意可知 $z=-2+\mathrm{i}$，所以 $\frac{5}{z}=\frac{5}{-2+i}=\frac{5(-2-\mathrm{i})}{(-2+\mathrm{i})(-2-\mathrm{i})}=\frac{-10-5i}{5}=-2-\mathrm{i}$，

所以其虚部为 -1.

2. A

【解析】依题意，$A=\{x|y=x^2\}=R$，$B=\{y|y=x^2\}=[0,+\infty)$，所以 $A\cap B=[0,+\infty)$.

3. A

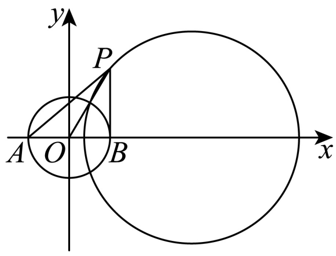
【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $a_4=12$，$a_6=3$，得 $q^2=\frac{a_6}{a_4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$，所以 $q=\pm\frac{1}{2}$，

又数列 $\{a_n\}$ 是单调递减的等比数列，若 $q=-\frac{1}{2}$，数列 $\{a_n\}$ 的项正负交替，不合题意，故 $q=\frac{1}{2}$，

$\therefore a_5=a_4\cdot q=12\times\frac{1}{2}=6$.

4. D

【解析】以 AB 所在直线为 x 轴，线段 AB 的中垂线为 y 轴建立平面直角坐标系如图所示.



则由题可知 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，则圆 O 的方程为：$x^2+y^2=4$.

设动点 $P(x,y)$，则根据 $|PA|=\sqrt{2}|PB|$ 可得 $(x+2)^2+y^2=2[(x-2)^2+y^2]$，

化简可得：$(x-6)^2+y^2=32$，即动点 P 的轨迹是以 $(6,0)$ 为圆心，$4\sqrt{2}$ 为半径的圆.

因为 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times|AB|\times|y_P|$，所以当 $\triangle PAB$ 面积最大时，点 P 坐标 $P(6,\pm4\sqrt{2})$，

当点 P 的坐标为 $(6,4\sqrt{2})$ 时，$\overrightarrow{PA}=(-8,-4\sqrt{2})$，$\overrightarrow{PB}=(-4,-4\sqrt{2})$，

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-8\times(-4)+(-4\sqrt{2})\times(-4\sqrt{2})=64$.

当点 P 的坐标为 $(6,-4\sqrt{2})$ 时，$\overrightarrow{PA}=(-8,4\sqrt{2})$，$\overrightarrow{PB}=(-4,4\sqrt{2})$，

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-8\times(-4)+4\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=64$.

5. C

【解析】$\because$ 函数 $f(2x-1)$ 为奇函数，$\therefore f(-1)=0$，又 $\because f(x+2)=f(-x)$，$\therefore f(3)=f(1+2)=f(-1)=0$，故选项 C 正确　.

6. D

【解析】因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，所以 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，即 $\omega=3k+1$，

因为 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ 上，即 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，

显然 $-\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}<0<\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}$，则 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\geqslant-\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$，可得 $\omega\leqslant2$，故 $0<\omega\leqslant2$

综上，$\omega=1$，则 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，故 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7. B

【解析】设 $A(0,-2)$，圆 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$ 的圆心为 $C(4,2)$，半径 $r=2$，两切点为 D，E，

如下图所示，则 $\angle DAE=\alpha=2\angle DAC$，

易知 $|AC|=\sqrt{(4-0)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{2}$，$|AD|=\sqrt{|AC|^2-|DC|^2}=2\sqrt{7}$，

$\therefore \sin\angle DAC=\dfrac{|CD|}{|AC|}=\dfrac{2}{4\sqrt{2}}$，$\cos\angle DAC=\dfrac{|AD|}{|AC|}=\dfrac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$，

即 $\sin\alpha=\sin2\angle DAC=2\sin\angle DAC\cos\angle DAC=2\times\dfrac{2}{4\sqrt{2}}\times\dfrac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

8. 题有点问题

9. ABD

【解析】当 $n=1$ 时，可得 $a_2+a_1=3\times2=6$，又因为 $a_1=1$，所以 $a_2=5$，故 A 正确；

由 $a_{n+1}+a_n=3\times2^n$，得 $a_{n+1}=-a_n+3\times2^n$，

所以 $\dfrac{a_{n+1}-2^{n+1}}{a_n-2^n}=\dfrac{-a_n+3\times2^n-2^{n+1}}{a_n-2^n}=\dfrac{-a_n+2^n}{a_n-2^n}=-1$，又 $a_1-2^1=1-2=-1$，

所以数列 $\{a_n-2^n\}$ 是以 -1 为首项，-1 为公比的等比数列，故 B 正确；

$S_4=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)=3\times2^1+3\times2^3=30$，故 C 错误；

由 B 选项可得 $a_n-2^n=(-1)\times(-1)^{n-1}$，所以 $a_n=2^n+(-1)^n$，

所以 $S_{2n}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n}$

$S_{2n}=2^1+(-1)^1+2^2+(-1)^2+2^3+(-1)^3+\cdots+2^{2n}+(-1)^{2n}$

$=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{2n}+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^{2n}$

$=\dfrac{2^1(1-2^{2n})}{1-2}+\dfrac{(-1)\cdot[1-(-1)^{2n}]}{1-(-1)}=2^{2n+1}-2$，故 D 正确.

10. AC

【解析】A，样本空间 Ω 包含 6 个样本点，事件 $A=\{1,2,5\}$，因此 $P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，正确；

B，由题意得 $A\cap B=\{1,5\}$，故 $P(AB)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，而 $P(A)P(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，

因 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，故事件 A 与 B 不独立，错误；

C，事件 $ABC=\{5\}$ 时，$P(ABC)=\dfrac{1}{6}$，已知 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，

代入 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 得，$\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times P(C)$，解得 $P(C)=\dfrac{2}{3}$，正确；

D，样本空间 Ω 仅包含 6 个样本点，事件 C 是 Ω 的子集，不可能包含 10 个样本点，错误.

11. ACD

【解析】当 $n=2$ 时，有 $\angle P_1FP_2=\pi$，故 P_1，F，P_2 三点共线，

所以 P_1P_2 是一条焦点弦，其最小值为通径长度为 $|P_1P_2|_{\min}=2p=4$，故 A 正确；

令 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，而 $F(1,0)$，可设直线 P_1P_2 的方程为 $x=ty+1$，

联立 $\begin{cases}y^2=4x\\x=ty+1\end{cases}$，消去 x 得 $y^2-4ty-4=0$，所以 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$，

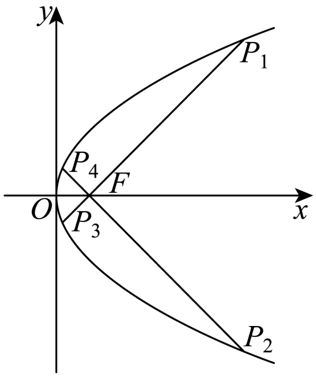
则 $x_1+x_2=t(y_1+y_2)+2=4t^2+2$，

$x_1x_2=(ty_1+1)(ty_2+1)=t^2y_1y_2+t(y_1+y_2)+1=-4t^2+4t^2+1=1$，

所以 $\frac{1}{|P_1F|}+\frac{1}{|P_2F|}=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{(x_2+1)+(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=\frac{4t^2+4}{4t^2+4}=1$，故 B 错误；

当 $n=4$ 时，有 $\angle P_1FP_2=\angle P_2FP_3=\angle P_3FP_4=\angle P_4FP_1=\frac{\pi}{2}$，

所以 P_1，F，P_3 三点共线，P_2，F，P_4 三点共线，如下图所示，



令 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$，$P_4(x_4,y_4)$，

直线 P_1P_3 的方程为 $x=my+1$，直线 P_2P_4 的方程为 $x=-\frac{y}{m}+1$，

可得 $|P_1F|=x_1+1$，$|P_2F|=x_2+1$，$|P_3F|=x_3+1$，$|P_4F|=x_4+1$，

同 B 分析得 $x_1+x_3=4m^2+2$，$x_4+x_2=\frac{4}{m^2}+2$，$x_1x_3=1$，$x_4x_2=1$，

所以 $\frac{1}{|P_1F||P_3F|}+\frac{1}{|P_2F||P_4F|}=\frac{1}{(x_1+1)(x_3+1)}+\frac{1}{(x_2+1)(x_4+1)}$

$=\frac{1}{x_1x_3+x_1+x_3+1}+\frac{1}{x_2x_4+x_2+x_4+1}=\frac{1}{4m^2+4}+\frac{1}{\frac{4}{m^2}+4}$

$=\frac{1}{4m^2+4}+\frac{m^2}{4m^2+4}=\frac{m^2+1}{4m^2+4}=\frac{1}{4}$，故 C 正确；

$|P_1P_3|+|P_2P_4|=x_1+x_3+2+x_4+x_2+2=4m^2+4+\frac{4}{m^2}+4\geqslant 2\sqrt{4m^2\times\frac{4}{m^2}}+8=16$，

当 $4\mathbf{m}^2=\frac{4}{\mathbf{m}^2}$，即 $m=\pm1$ 时取等号，

所以 $|P_1P_3|+|P_2P_4|$ 的最小值为 16，故 D 正确.

12. 4

【解析】由题意可知，双曲线 C 的焦点在 x 轴上，且 $m>0$，已知双曲线 $C:\frac{x^2}{m}-y^2=1$，则 $a^2=m$，$b^2=1$，

所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{m}}x$，因为双曲线 C 的一条渐近线为 $x-\sqrt{3}y=0$，所以 $m=3$，则

$c^2=a^2+b^2=4$，故 $c=2$，$2c=4$，所以双曲线 C 的焦距为 4.

13. 60

【解析】由 $(x^2+x+y)^6=[(x^2+x)+y]^6$ 的展开式的通项公式可得 $T_{k+1}=C_6^k(x^2+x)^{6-k}y^k$，

令 $k=3$，$T_4=C_6^3(x^2+x)^3y^3=20x^3y^3(x+1)^3$；

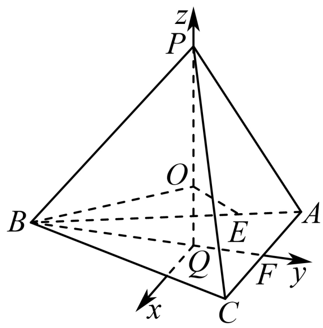
因为 $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$，所以 x^5y^3 项的系数是 $3\times20=60$.

14. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【解析】取 AC 的中点为 F，连接 BF，则点 P 在底面 ABC 内的射影 Q 在 BF 上，且 $\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{QF}$，

以 Q 为坐标原点，过 Q 点作平行于 AC 的直线为 x 轴，$\overrightarrow{QF}$，$\overrightarrow{QP}$ 分别为 y，z 轴的正方向建立空间直角坐标

系，如下图所示：



因为正四面体的棱长为$\sqrt{3}$，所以$BF=\frac{3}{2}$，因此$BQ=1$，$QF=\frac{1}{2}$，$PQ=\sqrt{2}$；

所以$Q(0,0,0)$，$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$B(0,-1,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，

由$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EB}$可得$E\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{1}{8},0\right)$；

易知正四面体$P-ABC$的外接球球心O在PQ上，设正四面体$P-ABC$的外接球半径为r，即$OP=r$；

在$Rt\triangle BOQ$中，$BO^2=BQ^2+OQ^2$，即$r^2=1^2+(\sqrt{2}-r)^2$，解得$r=\frac{3\sqrt{2}}{4}$；

因此$OQ=\sqrt{2}-r=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以$O\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$；

过点E作球O的截面，若截面面积为$\frac{13}{16}\pi$，

则截面圆半径r_1满足$\pi r_1^2=\frac{13}{16}\pi$，因此$r_1=\frac{\sqrt{13}}{4}$；

因此球心O到截面距离为$d=\sqrt{r^2-r_1^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$；

又$\overrightarrow{OE}=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{1}{8},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$，所以$\left|\overrightarrow{OE}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$；

设直线OE与该截面所成的角为θ，

则直线OE与该截面所成的角的正弦值为$\sin\theta=\frac{d}{\left|\overrightarrow{OE}\right|}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

15. (1) 易知$\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=55$，$\bar{y}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}y_i=91.7$，

所以$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2}=\frac{55950-10\times55\times91.7}{38500-10\times55^2}=\frac{5515}{8250}=\frac{1103}{1650}\approx0.67$，

可得$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=91.7-0.67\times55=54.85$，

所以加工时间y关于零件个数x的经验回归方程是$\hat{y}=0.67x+54.85$，

(2)(ⅰ)当$x=120$时，$\hat{y}=0.67\times120+54.85=135.25$

所以120个零件任务的回归预测时间$135.25<144$，因此低于现行标准时间.

(ⅱ)由于回归预测显示实际所需时间(约135.25分)比标准时间少9分钟，说明按照现行标准，工人很容易拿到奖励(实际效率更高).

如果车间希望控制奖励发放比例或更符合实际效率，应考虑调低标准时间，如调整到接近预测的

$\frac{135.25}{120} \approx 1.13$ 分/个，使标准更贴近真实加工能力.

16. (1) 在 $\triangle ABC$ 中，由 $\tan B\tan C = \tan B + \tan C + 1$ 得 $\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B\tan C} = -1$，

$\therefore \tan(B+C) = -1$，

$\because A + B + C = \pi$，

$\therefore \tan A = \tan[\pi - (B+C)] = -\tan(B+C)$，$\therefore \tan A = 1$，

又 $0 < A < \pi$，$\therefore A = \frac{\pi}{4}$

$\because a = \sqrt{6}$，$c = 3$，$C \in (0, \pi)$，

$\therefore$ 由正弦定理得 $\sin C = \frac{c\sin A}{a} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore C = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，

$\because c > a$，$\therefore C > A$，两个解均符合题意.

(2) 因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $C = \frac{\pi}{3}$，

$\therefore \sin B = \sin[\pi - (A+C)] = \sin(A+C) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

$\because \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$，

$\therefore N$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore S_{\triangle NBC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6} ac\sin B = \frac{1}{6} \times \sqrt{6} \times 3 \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$，

所以 $\triangle NBC$ 的 面积为 $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

17. (1) 在矩形 $CDEF$ 中，$CD = 1$，$DE = 2$，点 A，B 分别是 DE，CF 的中点，

所以四边形 $ABCD$ 和 $EFBA$ 是全等的正方形，所以 $BD \perp AC$，$AE \perp AB$

因为平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABFE$，平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABFE = AB$，$AE \subset$ 平面 $ABFE$，

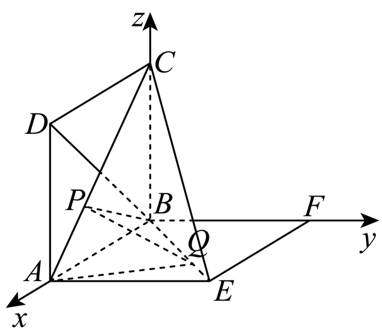
所以 $AE \perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $BD \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AE \perp BD$，

又因为 $BD \perp AC$，$AE \cap AC = A$，AE，$AC \subset$ 平面 AEC，

所以 $BD \perp$ 平面 AEC.

(2) 以 B 为原点，BA，BF，BC 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$E(1,1,0)$，$F(0,1,0)$，$C(0,0,1)$，$D(1,0,1)$，

则 $\overrightarrow{CA} = (1,0,-1)$，$\overrightarrow{CB} = (0,0,-1)$，$\overrightarrow{BE} = (1,1,0)$，

因为 $CP = BQ = a$，

所以 $\overrightarrow{CP} = \frac{\sqrt{2}a}{2}\overrightarrow{CA} = \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)$，$\overrightarrow{BQ} = \frac{\sqrt{2}a}{2}\overrightarrow{BE} = \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{\sqrt{2}a}{2}, 0\right)$，

则 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BQ}=\left(0,\frac{\sqrt{2}a}{2},\frac{\sqrt{2}a}{2}-1\right)$，

$\therefore\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}-1\right)^2}=\sqrt{a^2-\sqrt{2}a+1}\,(0<a<\sqrt{2})$，

所以线段 PQ 的长为 $\sqrt{a^2-\sqrt{2}a+1}\,(0<a<\sqrt{2})$.

(3) 因为 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{a^2-\sqrt{2}a+1}=\sqrt{\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$，所以当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，线段 PQ 最短，此时 P，Q 分别为线段 AC，BE 的中点，$Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{PQ}=\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{AQ}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 PQA 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $y=z=1$，

所以平面 PQA 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,1,1)$，

由 (1) 知，$\overrightarrow{BD}=(1,0,1)$ 为平面 AEC 的一个法向量，则 $\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{BD}\rangle\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\frac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以平面 PQA 与平面 AEC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

18. (1) 由题意可得 $c=\sqrt{3}$，又 $\begin{cases}a^2-b^2=3\\ \frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$，故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) (i) 由 (1) 可得：$A(-2,0)$，$B(0,-1)$，设 $P(x_0,y_0)$，$x_0>0$，$y_0>0$，

且 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，即 $x_0^2+4y_0^2=4$

则 $l_{AP}:y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，令 $x=0$，$y=\frac{2y_0}{x_0+2}$ $\therefore D\left(0,\frac{2y_0}{x_0+2}\right)$

则 $l_{BP}:y=\frac{y_0+1}{x_0}x-1$，令 $y=0$，$x=\frac{x_0}{y_0+1}$，$\therefore C\left(\frac{x_0}{y_0+1},0\right)$

则 $|AC|=\frac{x_0}{y_0+1}+2=\frac{x_0+2y_0+2}{y_0+1}$，$|BD|=\frac{2y_0}{x_0+2}+1=\frac{x_0+2y_0+2}{x_0+2}$

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\frac{1}{2}\left(\frac{x_0+2y_0+2}{y_0+1}\right)\cdot\left(\frac{x_0+2y_0+2}{x_0+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\frac{(x_0+2y_0+2)^2}{x_0y_0+x_0+2y_0+2}=\frac{2(x_0y_0+x_0+2y_0+2)}{x_0y_0+x_0+2y_0+2}=2.$

故求证四边形 $ABCD$ 面积为定值 2.

(*ii*) 直线 $l_{AB}:x+2y+2=0$，$P(x_0,y_0)$ 到直线　的　距离为

$d=\frac{|x_0+2y_0+2|}{\sqrt{5}}$ 且 $|AB|=\sqrt{5}$

$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{|x_0+2y_0+2|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}|x_0+2y_0+2|\leqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt{2(x_0^2+4y_0^2)}+2\right)=\sqrt{2}+1$

当且仅当 $x_0=2y_0=\sqrt{2}$ 时等号成立.

所以 $\triangle PCD$ 的面积 $S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PAB}-S_{ABCD}\leqslant\sqrt{2}+1-2=\sqrt{2}-1$.

19. (1) 由 $f'(x)=\frac{a}{x}-2(a\in R)$，当 $a=1$ 时，$f'(1)=-1$，$f(1)=0$，

故 $f(x)$ 的图象在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-(x-1)$，即 $x+y-1=0$.

(2) 由 $f'(x)=\frac{a}{x}-2(a\in R)$，

当 $a\leqslant 0$ 时，令 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减，$f(x)$ 最多一个零点，与题意不符；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x=\frac{a}{2}$，则当 $x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 单调递增，在 $\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，

故 $f(x)_{极大值}=f\left(\frac{a}{2}\right)=a\ln\frac{a}{2}+a=a\left(1+\ln\frac{a}{2}\right)$，且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

故 $f(x)$ 有两个零点，即 $f(x)_{极大值}=a\left(1+\ln\frac{a}{2}\right)>0$，$\therefore a>\frac{2}{\mathrm{e}}$.

(3) 由于 $g(x)=ax-2\mathrm{e}^x+2a=f(\mathrm{e}^x)$，所以 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的零点个数相同.

依题意共有 4 个不同的零点，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 各有两个零点.

不妨设 $y=g(x)$ 的两个零点为 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，$y=f(x)$ 的两个零点为 x_3，$x_4(x_3<x_4)$，

则有 $x_1=\ln x_3<\ln\frac{a}{2}<\ln x_4=x_2$，

因为 $\begin{cases}f(x_3)=a\ln x_3-2x_3+2a=0\\f(x_4)=a\ln x_4-2x_4+2a=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}\ln x_3=\frac{2}{a}x_3-2\\\ln x_4=\frac{2}{a}x_4-2\end{cases}$，①

所以 $\ln x_3-\ln x_4=\frac{2}{a}(x_3-x_4)$，②

又 $\ln x<x$，则 $x_1=\ln x_3<x_3$，$x_2=\ln x_4<x_4$，若四个零点成等差数列，则有两种情况：

(1) 当 $x_1<x_2<x_3<x_4$ 时，即 $\ln x_3$，$\ln x_4$，x_3，x_4 成等差数列，则有 $\ln x_3-\ln x_4=x_3-x_4$，③

由②③得 $a=2$，

代入①得 $\ln x_3=x_3-2$，$\ln x_4=x_4-2$，④

又 $\begin{cases}\ln x_3+x_3=2\ln x_4\\\ln x_4+x_4=2x_3\end{cases}$，⑤

将④代入⑤式可得 $\begin{cases}2x_3-2=2x_4-4\\2x_4-2=2x_3\end{cases}\Rightarrow x_4=x_3+1$，

由等差数列性质及 $x_4=x_3+1$，可得 $x_4-x_3=\ln x_4-\ln x_3=1$，从而有 $\ln\frac{x_4}{x_3}=1$，

可得 $x_4=ex_3$，解得 $x_3=\frac{1}{\mathrm{e}-1}$，$x_4=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$，这与④矛盾，故实数 a 不存在；

(2) 当 $x_1<x_3<x_2<x_4$ 时，即 $\ln x_3$，x_3，$\ln x_4$，x_4 成等差数列，则 $\ln x_3-\ln x_4=x_3-x_4$，③

由②③得 $a=2$，同理得 $\ln x_3=x_3-2$，$\ln x_4=x_4-2$，④

又 $\begin{cases}\ln x_3+\ln x_4=2x_3\\x_3+x_4=2\ln x_4\end{cases}$，⑥

将④代入⑥式可得 $\begin{cases}x_3+x_4-4=2x_3\\x_3+x_4=2x_4-4\end{cases}\Rightarrow x_4=x_3+4$，

代入③可得 $x_4=\mathrm{e}^4x_3$，解得 $x_3=\frac{4}{\mathrm{e}^4-1}$，$x_4=\frac{4\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^4-1}$，

这与④矛盾，故实数 a 不存在.

综上所述，不存在实数 a 使得四个零点成等差数列.