安徽省合肥一中2025－2026年高三1月月考

数学试题

★祝大家学习生活愉快★

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分，每小题只有一个选项符合要求

1. 已知集合 $A=\{x\mid 1<2x-1<3\}$，$B=\{x\mid x^2-3=0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$　　B. $\{\sqrt{3}\}$　　C. $\{-\sqrt{3}\}$　　D. $\varnothing$

2. 已知复数 z 满足 $\frac{z}{i}=2+z$，其中 i 为虚数单位，则 $|z|=$

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

3. 双曲线 $\frac{y^2}{m}-\frac{x^2}{n}=1(m,n>0)$ 过点 $(\sqrt{3},2)$，其两条渐近线的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则双曲线的方程为

A. $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{\frac{3}{5}}=1$　　B. $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{3}=1$　　C. $\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{9}=1$　　D. $\frac{y^2}{\frac{3}{5}}-\frac{x^2}{5}=1$

4. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且 $f(4-x)=f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$ 时，$f(x)=3-2x$，则 $f(-2025)=$

A. -1　　B. 1　　C. 3　　D. 7

5. 已知 $\frac{3}{2}\sin2\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\tan\alpha=$

A. $-2\sqrt{2}$　　B. $-\sqrt{2}$　　C. -2　　D. $-3\sqrt{2}$

6. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为2，E 为边 BC 的中点，F 为边 CD 上一点，当 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=4$ 时，$\tan\angle EAF=$

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

7. 在体积为 $\frac{3}{2}$ 的三棱锥 $A-BCD$ 中，$AC\perp AD$，$BC\perp BD$，平面 $ACD\perp$ 平面 BCD，$\angle ACD=\frac{\pi}{3}$，$\angle BCD=\frac{\pi}{4}$，若点 A，B，C，D 都在球 O 的表面上，则球 O 的表面积为

A. 12π　　B. 16π　　C. 32π　　D. 48π

8. 已知直线 $l:(3m+2)x+(m-3)y-3m+9=0$，若曲线 $C:(x-4)^2+y^2=r^2(r>0)$ 上存在点与 $P(-1,3)$ 关于直线 l 对称，则 r 的取值范围为

A. $[3,6]$　　B. $[3,5]$　　C. $[4,6]$　　D. $[4,5]$

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 已知随机变量 $X\sim N(8,4)$，若 $P(X\leqslant 6)=a$，$P(8<X<10)=b$，则

A. $P(X\geqslant 10)=a$　　B. $a+b=\frac{1}{2}$　　C. $E(2X-1)=15$　　D. $D(2X-2)=14$

10. 已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 F，点 F 关于原点 O 的对称点为 E，第一象限内的点 A，B 在 C 上, 且 $\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$, 则

A. 点 E 的坐标为 $(-4,0)$　　B. $|FA|=\frac{1}{2}|FB|$

C. 直线 AB 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. 直线 FA, FB 关于 x 轴对称

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $a^2+mc^2=\frac{1}{3}b^2$, $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2$, 则下列说法正确的是

A. $A=\frac{\pi}{6}$　　B. 若 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，则 $m=-\frac{2}{3}$

C. 当 $m=-1$ 时, $2b=3c$　　D. 当 $m=-1$ 时, $\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{3}{\tan B}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分

12. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 若 $a_1+a_3=16$, $a_2+a_4=4$, 则该等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为______.

13. 已知函数 $f(x)=\frac{x+a}{x^2+1}$ 恰有一个极小值点 x_1 和一个极大值点 x_2, 设点 $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$，则直线 AB 的斜率为______.

14. 现有10个外表相同的袋子, 里面均装有10个除颜色外其他无区别的小球, 第 $k(k=1,2,3,\cdots,10)$ 个袋中有 k 个红球, $10-k$ 个白球. 现将这些袋子混合后, 任选其中一个袋子, 并且从中连续取出三个球(每个球取出后不放回). 则第三次取出白球的概率为______.

四、解答题：本题共5小题，共77分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

15. 2025年12月, 某校语文教师对学生提出 “12月读一本书”的要求, 每位学生都选择且只能选择《红楼梦》和《三国演义》中的一本，现随机调查该校男、女生各100人，整理得到 2×2 列联表如下.

	《红楼梦》	《三国演义》
男生	30	70
女生	60	40

(1) 依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，能否认为学生选择《红楼梦》还是《三国演义》与性别有关?

(2) 已知学生选择哪本书是相互独立的，用频率代替概率，从该校选择《红楼梦》的学生中随机抽取3人，抽到的女生人数设为 ξ，求 ξ 的分布列和数学期望.

参考公式: $\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据:

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

16. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

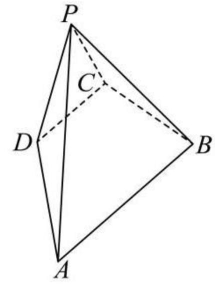
(1) 求 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $e^{ax-1}+ax-x \geqslant xf(x)$ 对任意 $x \in (0,+\infty)$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

17. 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PA \perp PD$,$\triangle PAB$ 为等边三角形,四边形 $ABCD$ 为直角梯形,$AB \parallel CD$,$AB \perp BC$,$AB=2CD=2$.

(1) 证明: $PB \perp PD$;

(2) 若直线 PD 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$. 求平面 PAD 和平面 ADC 所成角的余弦值.



18. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ ，四点 $P_1\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ ，$P_2\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ，$P_3(0, \sqrt{3})$ ，$P_4(1, \sqrt{3})$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过点 $D(4,0)$ 且斜率不为 0 的直线 l 与椭圆 C 相交于 M, N 两点.

(i) 若 O 为原点, 求 $\triangle MON$ 面积的最大值;

(*ii*) 点 $A(-2,0)$, 设点 Q 是线段 MN 上异于 M, N 的一点, 直线 QA , QM 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1+k_2=0$, 求 $\frac{|DM| \cdot|NQ|}{|DN| \cdot|MQ|}$ 的值.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1=1$, $\frac{S_{n-1}}{a_n}-\frac{S_{n-1}}{a_{n-1}}+\frac{1}{2}=0(n \geqslant 2)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 当 $n \geqslant 3$ 时, 已知 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2) \cdots(x-a_n)$ 的导函数为 $f'(x)=n(x-b_1)(x-b_2) \cdots(x-b_{n-1})$. 其中 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_{n-1}$. 令 $F(u, v)=\sum_{i=1}^{n} \frac{u v}{(j-\mathrm{i}+u)(j-\mathrm{i}-v)}$.

(i) 设 $u_j=b_j-j$, $v_j=j-b_{j-1}(2 \leqslant j \leqslant n-1)$, 证明: $F(u_j, v_j)=0$;

(*ii*) 证明: 对任意 $2 \leqslant j \leqslant n-1$, 有 $b_j-b_{j-1}>1$.

参考答案

1. B

【解析】因为 $1<2x-1<3$，解得 $1<x<2$，所以 $A=\{x\mid 1<x<2\}$，
因为 $x^2-3=0$，解得 $x=\pm\sqrt{3}$，所以 $B=\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$，
所以 $A\cap B=\{\sqrt{3}\}$.

2. D

【解析】由 $\dfrac{z}{i}=2+z$，得 $z=2\mathrm{i}+zi$，$z(1-\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，$z=\dfrac{2i}{1-i}=\dfrac{2i(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{2i(1+\mathrm{i})}{2}=-1+\mathrm{i}$,
故 $|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$.

3. C

【解析】由两条渐近线的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，可得渐近线的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{\pi}{6}$，
由 $\dfrac{y^2}{m}-\dfrac{x^2}{n}=1(m,n>0)$ 可知双曲线的焦点在 y 轴上,
当渐近线的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 时,渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，点 $(\sqrt{3},2)$ 在直线 $y=\sqrt{3}x$ 的下方，不可能在该双曲线上，不合题意;
当渐近线的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$ 时,渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，点 $(\sqrt{3},2)$ 在直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 的上方,此时
$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\\ \dfrac{4}{m}-\dfrac{3}{n}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3\\ n=9\end{cases}$，则双曲线的方程为 $\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{x^2}{9}=1$.

4. B

【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$． 又因为 $f(4-x)=f(x)$，
所以 $f(4-x)=f(-x)$，所以 $f(x+4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为 4．
因为 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)=3-2x$，所以 $f(-2025)=f(-1)=f(1)=1$.

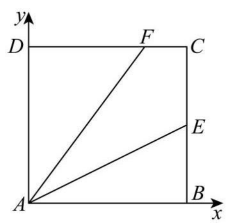
5. A

【解析】原等式 $\dfrac{3}{2}\sin2\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$ 可化为 $\dfrac{3}{2}\times2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin\alpha$，即 $3\sin\alpha\cos\alpha=-\sin\alpha$,
因为 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\alpha>0$，所以 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$，

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\alpha=\dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}=-2\sqrt{2}$..

6. A

【解析】以 A 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴,建立平面直角坐标系如图所示，



则 $A(0,0)$、$E(2,1)$ ，设 $|\overrightarrow{DF}|=x$ ，则 $F(x,2)$, $0\leqslant x\leqslant 2$ ，故 $\overrightarrow{AF}=(x,2)$, $\overrightarrow{AE}=(2,1)$.

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(2,1)\cdot(x,2)=2x+2$ ，故 $x=1$

此时点 $F(1,2)$ ，此时 $\tan\angle EAF=\dfrac{2-\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{4}$.

7. A

【解析】如图，取 CD 的中点 O ，连接 AO ， BO ，因为 $AC\perp AD$, $BC\perp BD$ ，

所以 $OA=OB=OC=OD$ ，因此点 O 就是球心，又 $\angle BCD=\dfrac{\pi}{4}$ ，

故 $\triangle BCD$ 是等腰直角三角形，所以 $OB\perp CD$ ，

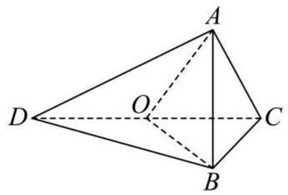
因为平面 $ACD\perp$ 平面 BCD ，平面 $ACD\cap$ 平面 $BCD=CD$ ，

且 $OB\subset$ 平面 BCD ，所以 $OB\perp$ 平面 ACD ，

设球 O 半径为 R ，则 $OB=R$, $CD=2R$ ，则 $AC=R$, $AD=\sqrt{3}R$ ，

所以三棱锥 $A-BCD$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot OB=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times AC\cdot AD\cdot OB=\dfrac{\sqrt{3}}{6}R^3=\dfrac{3}{2}$，

所以 $R=\sqrt{3}$ ，所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2=12\pi$.



8. C

【解析】设点 $P(-1,3)$ 关于直线 l 的对称点 $Q(x,y)$ ，则线段 PQ 的中点 $\left(\dfrac{x-1}{2},\dfrac{y+3}{2}\right)$ 在直线 l 上，

又 $\overrightarrow{PQ}=(x+1,y-3)$ ，直线 l 的方向向量 $\vec{a}=(m-3,-3m-2)$ ，而 $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{a}=0$ ，

因此 $\begin{cases}(3m+2)\cdot\dfrac{x-1}{2}+(m-3)\cdot\dfrac{y+3}{2}-3m+9=0\\(x+1)(m-3)+(y-3)(-3m-2)=0\end{cases}$ ，即 $\begin{cases}(3x+y-6)m=-2x+3y-7\\3x+2y-3=(x-3y+10)m\end{cases}$

消去 m 得 $(3x+y-6)(3x+2y-3)+(2x-3y+7)(x-3y+10)=0$ ，

整理得 $x^2+y^2-6y+8=0$ ，即 $x^2+(y-3)^2=1$ ，于是点 Q 在以点 $D(0,3)$ 为圆心， 1 为半径的圆上，

而曲线 $C:(x-4)^2+y^2=r^2(r>0)$ 是以点 $C_1(4,0)$ 为圆心， r 为半径的圆， $|C_1D|=5$，

依题意，点 Q 在曲线 C 上，则曲线 C 与圆 D 有公共点，即这两个圆相交或相切，

因此 $|r-1|\leqslant|C_1D|\leqslant r+1$ ，即 $|r-1|\leqslant 5\leqslant r+1$ ，解得 $4\leqslant r\leqslant 6$ ，

所以 r 的取值范围为 $[4,6]$.

法二：直线 l 过定点 $T(0,3)$. 设 P 的对称点为 P' ，则 $|TP'|=|TP|=1$ ，故点 P' 的轨迹为以 T 为圆心，半径为 1 的圆，方程为 $x^2+(y-3)^2=1$.

9. ABC

【解析】因为随机变量 $X\sim N(8,4)$ ，所以 $P(X\geqslant 10)=P(X\leqslant 6)=a$ ，故 A 正确； $a+b=P(X\leqslant 6)+P(8<X<10)=P(X\geqslant 10)+P(8<X<10)=P(X>8)=\dfrac{1}{2}$ ，故 B 正确；

因为随机变量 $X\sim N(8,4)$ ，所以 $E(X)=8$, $D(X)=4$ ，则 $E(2X-1)=2E(X)-1=2\times 8-1=15$ ，

故 C 正确;

又 $D(2X-2)=4D(X)=16$,故 D 错误.

10. BD

【解析】对于 A ,由抛物线的标准方程可知: $F(2,0)$,所以点 E 的坐标为 $(-2,0)$,故 A 错误;

对于 B ,由 $\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$,可得点 A 为线段 EB 的中点,点 E 为 C 的准线与 x 轴的交点,所以点 A 到准线的距离是点 B 到准线的距离的 $\frac{1}{2}$,由抛物线定义可得 B 正确;

对于 C ,设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,由点 A 为 EB 的中点,可得 $y_2=2y_1,y_2^2=4y_1^2$,所以 $x_2=4x_1$,又 $x_1+2=\frac{1}{2}(x_2+2)$,联立解得 $x_1=1,x_2=4$,所以 $A(1,2\sqrt{2})$, $B(4,4\sqrt{2})$,所以 $k_{AB}=\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{4-1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,故 C 错误;

对于 D , $k_{EA}=\frac{2\sqrt{2}}{1-2}=-2\sqrt{2}$, $k_{FB}=\frac{4\sqrt{2}}{4-2}=2\sqrt{2}$, $k_{FA}+k_{FB}=0$,故 D 正确.

11. BC

【解析】对于 A , $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=2$,即 $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=1$,

因为 $0<A<\pi$,故 $\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$,故 $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,故 $A=\frac{\pi}{3}$, A 选项错误;

对于 A ,由对 A 选项的分析可知,当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时, $\triangle ABC$ 为等边三角形,故 $a=b=c$,则 $1+m=\frac{1}{3}$,解得 $m=-\frac{2}{3}$,故 B 选项正确;

对于 C ,当 $m=-1$ 时, $a^2-c^2=\frac{1}{3}b^2$,结合余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $b^2-2bc\cos A=\frac{1}{3}b^2$,即 $3c\cos A=b$,即 $2b=3c$,故 C 选项正确;

对于 D ,由 $\tan B\left(\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}\right)=\frac{\sin B}{\cos B}\left(\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}\right)=\frac{\sin B}{\cos B}$.

$\frac{\sin C\cos A+\sin A\cos C}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{\cos B}\cdot\frac{\sin B}{\sin A\sin C}=\frac{\sin^2 B}{\cos B\sin A\sin C}=\frac{b^2}{ac\cos B}$,

又由对 C 选项分析可知,当 $m=-1$ 时, $b=\frac{3}{2}c$,代入 $a^2-c^2=\frac{1}{3}b^2$,解得 $a=\frac{\sqrt{7}}{2}c$,

故 $a=\frac{\sqrt{7}}{3}b,c=\frac{2}{3}b$,代入 $ac\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$,得 $ac\cos B=\frac{1}{9}b^2$,

故 $\frac{b^2}{ac\cos B}=9$,即 $\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{9}{\tan B}$,故 D 选项错误.

12. $\frac{1}{4}$

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,因为 $\{a_n\}$ 各项均为正数,若 $a_1+a_3=16,a_2+a_4=4$,则 $\frac{a_2+a_4}{a_1+a_3}=\frac{q(a_1+a_3)}{a_1+a_3}=q=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$,故该等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $\frac{1}{4}$.

13. $\frac{1}{2}$

【解析】由题意知 $f(x)=\frac{x+a}{x^2+1}$ 的定义域为 R ,且 $f'(x)=\frac{x^2+1-2x(x+a)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2ax+1}{(x^2+1)^2}$.

令 $f'(x)=0$,得 $x^2+2ax-1=0$,

此方程有两个不相等的实数根 x_1,x_2 ,其中 $x_1<x_2,x_1+x_2=-2a,x_1x_2=-1$,

故直线 AB 的斜率为 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{x_2+a}{x_2^2+1}-\frac{x_1+a}{x_1^2+1}}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)[1-x_1x_2-a(x_1+x_2)]}{(x_2-x_1)(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=$

$$\frac{1-x_1x_2-a(x_1+x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=\frac{2a^2+2}{2+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}=\frac{2a^2+2}{4a^2+4}=\frac{1}{2},$$

即直线 AB 的斜率为 $\frac{1}{2}$.

14. $\frac{9}{20}$

【解析】设选出的是第 k 个袋子, 连续三次取球的方法数为 $10\times9\times8=720$,

第三次取出的是白球的三次取球颜色有如下四种情形:

(白, 白, 白): 取法数为 $(10-k)(9-k)(8-k)$,

(白, 红, 白): 取法数为 $k(10-k)(9-k)$,

(红, 白, 白): 取法数为 $k(10-k)(9-k)$,

(红, 红, 白): 取法数为 $k(k-1)(10-k)$,

从而第三次取出的是白球的种数为:

$(10-k)(9-k)(8-k)+2k(10-k)(9-k)+k(k-1)(10-k)=72(10-k)$,

则在第 k 个袋子中第三次取出的是白球的概率 $p_k=\frac{10-k}{10}$,而选到第 k 个袋子的概率为 $\frac{1}{10}$,

故所求概率为 $p=\sum_{k=1}^{10}p_k\cdot\frac{1}{10}=\sum_{k=1}^{10}\frac{10-k}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{10}(10-k)=\frac{9}{20}$.

15. (1) 因为 $\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200\times(30\times40-60\times70)^2}{90\times110\times100\times100}=18.182>10.828$,

所以依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验, 可以认为学生选择《红楼梦》还是《三国演义》与性别有关.

(2) 由题可知, ξ 的所有可能取值为 0 , 1 , 2 , 3 ,

选择《红楼梦》的学生是女生的概率为 $\frac{2}{3}$,所以 $\xi\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$.

所以 $P(\xi=0)=C_3^0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$, $P(\xi=1)=C_3^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$,

$P(\xi=2)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$, $P(\xi=3)=C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{8}{27}$,

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

所以 $E(\xi)=3\times\frac{2}{3}=2$.

16. (1) 函数 $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 又 $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$,

令 $f'(x)=0$, 得 $x=1$, 当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增; 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$, 单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

(2) 由 $e^{ax-1}+ax-x\geqslant xf(x)$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立, 得 $e^{ax-1}+ax-x\geqslant\ln x+1$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立, 即 $e^{ax-1}+ax-1\geqslant\ln x+x$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

令 $g(x)=e^x+x$, 则有 $g(ax-1)\geqslant g(\ln x)$, 显然 $g(x)$ 为增函数, 可得 $ax-1\geqslant\ln x$,

则 $a\geqslant\frac{\ln x+1}{x}$,所以 $a\geqslant f(x)_{\max}$. 由 (1) 可知 $f(x)_{\max}=f(1)=1$,

所以 $a\geqslant1$, 故 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

17. (1) 取 AB 的中点 O，连接 PO, DO，

则 $DO \perp AB, PO \perp AB$，

又 $DO \cap PO = O, DO, PO \subset$ 平面 $POD, \therefore AB \perp$ 平面 POD，

$\because PD \subset$ 平面 $POD, \therefore AB \perp PD$.

故由 $PD \perp PA, PD \perp AB, PA, AB \subset$ 平面 PAB，从而 $PD \perp$ 平面 PAB . 因为 $PB \subset$ 平面 PAB，故 $PB \perp PD$.

(2) (i) 由 (1) 知 $AB \perp PD$，又 $PA \perp PD$ 且 $PA \cap AB = A$，$PA, AB \subset$ 平面 PAB，

$\therefore PD \perp$ 平面 $PAB, \because PO \subset$ 平面 $PAB, \therefore PD \perp PO$，

又由 (1) 知: $AB \perp$ 平面 POD，而 $AB \subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore$ 平面 $POD \perp$ 平面 $ABCD$，

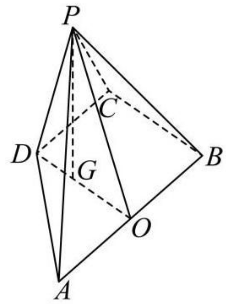
过点 P 作 $PG \perp OD$，垂足为 G .

$\because$ 平面 $POD \cap$ 平面 $ABCD = DO, PG \subset$ 平面 $POD, \therefore PG \perp$ 平面 $ABCD$，

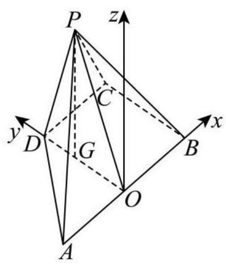
所以 PD 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle PDO$，即 $\angle PDO = \frac{\pi}{4}$，

$\therefore PD = PO = \sqrt{3}, \therefore DO = BC = \sqrt{6}, PG = \frac{\sqrt{6}}{2}$，

故四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (1+2) \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{2}$.



(ii) 以 O 为坐标原点, OB, OD 所在直线为 x, y 轴, 在平面 POD 内, 与 PG 平行的线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(-1,0,0)$, $C(1,\sqrt{6},0)$, $D(0,\sqrt{6},0)$, $P\left(0,\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，

设平面 PAD 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}, \therefore \vec{m}=(\sqrt{6},-1,-1)$，

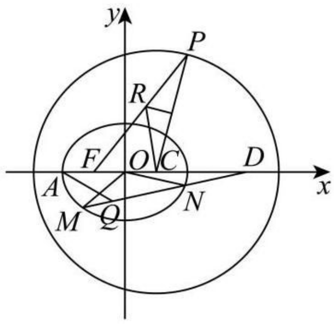
又平面 ACD 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1), \therefore \cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{-1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以, 二面角 $P-AD-C$ 余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

18. (1) 由对称性知 $P_1\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$, $P_2\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 和 $P_3(0,\sqrt{3})$ 在椭圆 C 上, 所以 $\begin{cases}b=\sqrt{3}\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1\end{cases}$

所以 $a=2$, C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) 方法一: 设直线 l 的方程为 $x=ty+4$,点 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,



由 $\begin{cases}x=ty+4,\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 消去 x 得: $(3t^2+4)y^2+24ty+36=0$,

则 $\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{-24t}{3t^2+4},\\ y_1\cdot y_2=\dfrac{36}{3t^2+4}\end{cases}$ $\Delta=144(t^2-4)>0$,则 $t<-2$ 或 $t>2$.$|y_1-y_2|=\dfrac{\sqrt{144(t^2-4)}}{3t^2+4)}$,

$\triangle MON$ 面积 $s=\dfrac{1}{2}\times 4\times|y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}\times 4\times\dfrac{12\sqrt{(t^2-4)}}{3t^2+4}=\dfrac{24\sqrt{t^2-4}}{3t^2+4}$

令 $\sqrt{t^2-4}=u(u>0)$,则 $t^2=u^2+4$, $s=\dfrac{24u}{3u^2+16}=\dfrac{24}{3u+\dfrac{16}{u}}\leqslant\sqrt{3}$,

当且 $u=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$,即 $t^2=\dfrac{28}{3}$ 时, $\triangle MON$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

方法二: 显然直线 l 的斜率 k 存在且非零, 设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$,点 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=k(x-4),\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 消去 y 得: $(4k^2+3)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$,

则 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{4k^2+3},\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{64k^2-12}{4k^2+3}\end{cases}$, $\Delta=144(1-4k^2)>0$,则 $-\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{1}{2}$ 且 $k\neq 0$,

$|MN|=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{k^2+1}\times\dfrac{12\sqrt{1-4k^2}}{4k^2+3}\cdot O$ 点到直线 l 的距离 $d=\dfrac{4|k|}{\sqrt{k^2+1}}$,

所以 $\triangle MON$ 面积 $s=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{k^2+1}\times\dfrac{12\sqrt{1-4k^2}}{4k^2+3}\times\dfrac{4|k|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{24|k|\cdot\sqrt{1-4k^2}}{4k^2+3}=\dfrac{24\sqrt{k^2-4k^4}}{4k^2+3}$.

$s^2=\dfrac{24^2(k^2-4k^4)}{(4k^2+3)^2}=-144\times\left[1-\dfrac{7}{4k^2+3}+\dfrac{12}{(4k^2+3)^2}\right]$

令 $u=\dfrac{1}{4k^2+3}$,则 $s^2=-144(12u^2-7u+1)$,

当 $u=\dfrac{7}{24}$,即 $k^2=\dfrac{3}{28}$ 时, s^2 的最大值为 3, 所以 $\triangle MON$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

方法三: 显然直线 l 的斜率 k 存在且非零, 设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$,点 M (x_1,y_1), $N(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=k(x-4)\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$,消去 y 得: $(4k^2+3)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$,

则 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{4k^2+3}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{64k^2-12}{4k^2+3} \end{cases}$ $\Delta=144(1-4k^2)>0$ ，则 $-\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{1}{2}$ 且 $k\neq 0$ ，

$|MN|=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{k^2+1}\times\dfrac{12\sqrt{1-4k^2}}{4k^2+3}$.

O 点到线 l 的距离 $d=\dfrac{4|k|}{\sqrt{k^2+1}}$ ，所以 $\triangle MON$ 面积 $s=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{k^2+1}\times\dfrac{12\sqrt{1-4k^2}}{4k^2+3}\times\dfrac{4|k|}{\sqrt{k^2+1}}$

$=\dfrac{24|k|\cdot\sqrt{1-4k^2}}{4k^2+3}=\dfrac{24\sqrt{k^2-4k^4}}{4k^2+3}$.$s=24\times\dfrac{\sqrt{k^2(1-4k^2)}}{4k^2+3}=\dfrac{24}{4\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{16k^2\times 3(1-4k^2)}}{4k^2+3}$

$\leqslant 2\sqrt{3}\times\dfrac{\dfrac{16k^2+3(1-4k^2)}{2}}{4k^2+3}=\sqrt{3}$ ，即当 $k^2=\dfrac{3}{28}$ 时，s 有最大值为 $\sqrt{3}$.

(ii) 因为 $k_1+k_2=0$ ，所以直线 QA, QM 的倾斜角互补，所以 $|QA|=|QD|$ ，所以点 Q 在线段 AD 的垂直平分线上，所以 $Q\left(1,-\dfrac{3}{t}\right)$.

于是 $|DM|=\sqrt{t^2+1}\,|y_1|, |DN|=\sqrt{t^2+1}\,|y_2|$

$|QM|=\sqrt{t^2+1}\left|y_1+\dfrac{3}{t}\right|, |QN|=\sqrt{t^2+1}\left|y_2+\dfrac{3}{t}\right|$. 所以 $\dfrac{|DM|\cdot|QN|}{|DN|\cdot|QM|}=\dfrac{|y_1|\cdot\left|y_2+\dfrac{3}{t}\right|}{|y_2|\cdot\left|y_1+\dfrac{3}{t}\right|}$,

于是 $\dfrac{|DM|\cdot|QN|}{|DN|\cdot|QM|}=\dfrac{\left|y_1\cdot\left(y_2+\dfrac{3}{t}\right)\right|}{\left|y_2\cdot\left(y_1+\dfrac{3}{t}\right)\right|}=\dfrac{\left|y_1\cdot y_2+\dfrac{3}{t}y_1\right|}{\left|y_1\cdot y_2+\dfrac{3}{t}y_2\right|}$ ，因为 $y_1\cdot y_2=\dfrac{-3}{2t}(y_1+y_2)$ ，

所以 $\dfrac{|DM|\cdot|QN|}{|DN|\cdot|QM|}=\dfrac{\left|\dfrac{-3}{2t}(y_1+y_2)+\dfrac{3}{t}y_1\right|}{\left|\dfrac{3}{2t}(y_1+y_2)-\dfrac{3}{t}y_2\right|}=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}y_1-\dfrac{1}{2}y_2\right|}{\left|\dfrac{1}{2}y_1-\dfrac{1}{2}y_2\right|}=1$. 所以 $\dfrac{|DM|\cdot|QN|}{|DN|\cdot|QM|}$ 的值为 1.

19. (1) 由题意可知 $\dfrac{1}{2S_{n-1}}=\dfrac{1}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}a_n}$.

因此 $\begin{cases} 2S_n=\dfrac{a_na_{n+1}}{a_{n+1}-a_n} \\ 2S_{n-1}=\dfrac{a_na_{n-1}}{a_n-a_{n-1}} \end{cases}\Rightarrow 2a_n=\dfrac{a_na_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}-\dfrac{a_na_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}$

注意到 $a_n\neq 0$ ，故 $\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}-\dfrac{a_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=2$ ，从而 $a_{n+1}(a_n-a_{n-1})-a_{n-1}(a_{n+1}-a_n)=$ $2(a_{n+1}-a_n)(a_n-a_{n-1})$

化简可得 $a_{n+1}a_n-2a_n^2+a_{n-1}a_n=0$ ，故 $a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n(n\geqslant 2)$. 故 $\{a_n\}$ 为等差数列.

有 $\dfrac{1}{a_2}-1+\dfrac{1}{2}=0$ 解得 $a_2=2$ ，故 $a_n=n(n\in\mathbb{N}^*)$.

(2) (i) 注意到

$f'(x)=(x-2)(x-3)\cdots(x-n)+(x-1)(x-3)(x-4)\cdots(x-n)+\cdots+(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))$

故对任意 $j=1,2,\cdots,n-1$, $f'(j)\cdot f'(j+1)<0$ ，故 $f'(x)$ 在 $(j,j+1)$ 上存在零点，

因此存在 $n-1$ 个不同的零点，即 $b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}$ ，故 $j<b_j<b_{j+1}(j=1,2,\cdots,n-1)$，故 $u_j, v_j>0$.

注意到 $j-\mathrm{i}+u_j=b_j-\mathrm{i}$, $j-\mathrm{i}-v_j=b_{j-l}-\mathrm{i}$ ，故只要证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{(b_j-\mathrm{i})(b_{j-1}-\mathrm{i})}=0$.

注意到 $f'(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{f(x)}{(x-\mathrm{i})}$ ，且 $f'(b_j)=f'(b_{j-1})=0$ ，故

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{b_j-i}=0\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{b_{j-1}-i}=0\end{cases}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{b_j-i}-\frac{1}{b_{j-1}-i}\right)=0$$

从而 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b_{j-1}-b_j}{(b_j-\mathrm{i})(b_{j-1}-\mathrm{i})}=0$ ，故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{(b_j-\mathrm{i})(b_{j-1}-\mathrm{i})}=0$ ．

(ii) 令 $d_i=|j-\mathrm{i}|$ ，故 $d_0>d_1>d_2>\cdots>d_j,d_j<d_{j+1}<\cdots<d_{n+1}$ ，

由 (i) 可知 $\sum\limits_{i=1}^{j-1}\dfrac{1}{(d_i+u_j)(d_i-v_j)}-\dfrac{1}{u_jv_j}+\sum\limits_{i=j+1}^{n}\dfrac{1}{(d_i-u_j)(d_i+v_j)}=0$

从而 $\sum\limits_{i=1}^{j-1}\dfrac{u_jv_j}{(d_i+u_j)(d_i-v_j)}+\sum\limits_{i=j+1}^{n}\dfrac{u_jv_j}{(d_i-u_j)(d_i+v_j)}=1$ ．

令 $G(u,v)=\sum\limits_{i=1}^{j-1}\dfrac{uv}{(d_i+u)(d_i-v)}+\sum\limits_{i=j+1}^{n}\dfrac{uv}{(d_i-u)(d_i+v)}\ (0\leqslant u<d_{j+1},0\leqslant v<d_{j-1})$

容易知道 $G(u,v)$ 关于 u,v 都是单调递增的, 且 $G(u_j,v_j)=1$ ．

由于 $u_j+v_j=b_j-j+j-b_{j-1}=b_j-b_{j-1}$ ，故只要证明: $u_j+v_j>1$ ．

根据以上讨论可知, 只要证明: 当 $u,v\geqslant 0$ ，且 $u+v=1$ 时，$F(u,v)<1$ ．

由 $\sum\limits_{i=1}^{j-1}\dfrac{1}{(d_i+u)(d_i-v)}=\sum\limits_{i=1}^{j-1}\dfrac{1}{(d_{i-1}-v)(d_i-v)}=\sum\limits_{i=1}^{j-1}\left(\dfrac{1}{d_i-v}-\dfrac{1}{d_{i-1}-v}\right)<\dfrac{1}{1-v}=\dfrac{1}{u}$

$\sum\limits_{i=j+1}^{n}\dfrac{1}{(d_i-u)(d_i+v)}=\sum\limits_{i=j+1}^{n}\dfrac{1}{(d_i-u)(d_{i+1}-u)}=\sum\limits_{i=j+1}^{n}\left(\dfrac{1}{d_i-u}-\dfrac{1}{d_{i+1}-u}\right)<\dfrac{1}{1-u}=\dfrac{1}{v}$

从而 $G(u,v)<uv\left(\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}\right)=u+v=1$ ，不等式成立.

从而, 若 $u_j+v_j\leqslant 1$ ，取 $t\geqslant 0$ ，使得 $u_j+(v_j+t)=1$ ，故 $F(u_j,v_j)\leqslant F(u_j,v_j+t)<1$ ，矛盾.

综上，结论成立．