安徽省六校联考2025－2026学年高三上学期1月素质检测

数学试题

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分，每小题只有一个选项符合要求

1. 设集合 $M=|1,2|$，$N=\left\{x\in N^*\left|\frac{8}{x}\in N^*\right.\right\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{2,4\}$　　D. $\{1,2,4\}$

2. 若复数 z 满足 $zi=\frac{3-i}{1+i}$（i为虚数单位），则 $|z|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

3. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB\,//\,DC$，$AB=2BC=2CD=2$，P 是线段 CD 上的动点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为

A. $-2\sqrt{2}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{3}{4}$　　D. 0

4. 甲、乙、丙三位同学从7处不同的最点中各自选2处旅游,则这三人选择的景点中恰有1处是相同的选法共有

A. 840种　　B. 420种　　C. 210种　　D. 140种

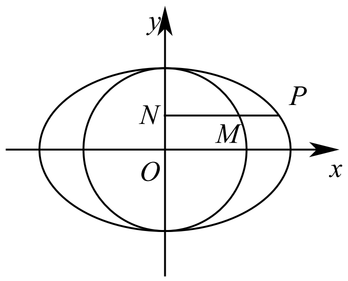
5. 把函数 $f(x)=\sin2x-\sqrt{3}\cos2x$ 的图象向左平移 $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位长度，得到的函数图象关于 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，则 $\varphi=$

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

6. 在棱长均为2的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，M 是棱 AB 的中点，N 是侧面 ACC_1A_1 内任意一点（包含边界），则直线 MN 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值的取值范围是

A. $\left[\frac{1}{4},1\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},1\right]$　　C. $\left[\frac{\sqrt{15}}{10},1\right]$　　D. $\left[\frac{\sqrt{21}}{14},1\right]$

7. 椭圆可以看作圆沿定直线方向拉伸或压缩而得.如图，M 是圆 O 上一动点，M 在 y 轴上的射影为 N，则满足 $\overrightarrow{NP}=\lambda\overrightarrow{NM}\,(\lambda>1)$ 的动点 P 的轨迹是椭圆.若椭圆的离心率 $\mathrm{e}=\frac{2}{3}$，则 $\lambda=$



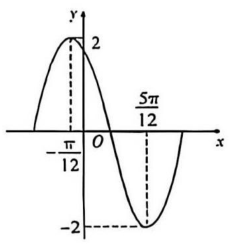
A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{3}$

8. 已知定义域为 R 的函数 $f(x)$，$g(x)$，满足 $f(x)-g'(x)=2f(x-1)+g'(5-x)=2$，其中 $g'(x)$ 是 $g(x)$ 的导函数，若 $g(x)$ 为偶函数，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(35)=$

A. 74　　B. 72　　C. 70　　D. 68

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,-\pi<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图所示.则下列说法正确的是



A. $\omega=2$

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$ 上单调递增

D. 若函数 $f(\lambda x)(\lambda>0)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有且仅有两个零点和两个极值点，则 $\lambda\in\left[\frac{11}{6},\frac{7}{3}\right)$

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-ax, & x\leqslant 0\\ |\ln x|, & x>0\end{cases}(a\in R)$，则下列结论正确的是

A. 当 $a=2$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$

B. 若函数 $f(x)$ 无最小值，则 a 的取值范围为 $(-\infty,0)$

C. 对于任意实数 a 都存在 x_0，使得 $f(-x_0)=f(x_0)$

D. 当 $x>0$ 时，若方程 $f(-x)=f(x)$ 恰有3个根，则 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$

11. 数学中有许多与圆相关的优美的曲线,并由此衍生了很多有趣的数学问题.给出的下列四个结论中,正确结论的选项是

A. 曲线 $C:x^2+y^2=2|x|+2|y|$ 上任意两点的距离都不超过 $4\sqrt{2}$

B. 曲线 $C:y=\sqrt{1-x^2}$ 与曲线 $\Gamma:y=2|x|-2$ 围成的封闭区域包含6个整点(即横纵坐标均为整数的点)

C. 直线 $y=kx-2$ 与曲线 $\sqrt{1-(y-1)^2}=|x|-1$ 有两个不同的交点，则实数 k 的取值范围是 $\left(-2,-\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3},2\right)$

D. 曲线 $C:(x-4\cos\theta)^2+(y-4\sin\theta)^2=1(\theta\in R)$ 上点 $P(x,y)$ 所组成的图形的面积为 16π

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分

12. 已知抛物线 $C:y^2=6x$ 的焦点为 F，过定点 $P(-2,0)$ 的直线与 C 交于 M，N 两点，则 $4|FM|+|FN|$ 的最小值为______.

13. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=2$，$a_2=3$，$a_{n+2}-a_n=3+(-1)^n$，则 $S_{60}=$ ______.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$\angle BAC$ 的角平分线 AD 交 BC 于点 D，且 $AC=\sqrt{2}BD$，则 $\tan\angle ABC=$ ______.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

15. 已知函数 $f(x)=(3x^2+2ax+a^2)e^{2x}(a>0)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x+20e^2y+1=0$ 垂直.

(1) 求 a 的值；

(2) 若方程 $f(x)=m$ 有三个实数根, 求实数 m 的取值范围.

16. 某中学为了提升课堂教学效果，提出了“学为中心”的理念，同时提出了新的公开课评价标准，为了得到高一年级 50 位教师对新评价标准是否赞同的真实反馈，学校教研处利用“西蒙斯模型”进行网上问卷调查；在微信中开发了一个随机数模拟小程序,当教师点击“抽取”键,手机屏幕将出现数字的快速随机滚动,并最终等可能的生成 1、2、3、4、5 当中的一个数，每个教师抽取两次.规定“若抽取的两个数奇偶性不同，则按方案①填写问卷，否则按方案②填写问卷”.

方案①: 若第一次抽到的是偶数且第二次抽到的是奇数，则在问卷中填“Y”，否则填“N”；

方案②: 若对新评价标准赞同，则在问卷中填“Y”，否则填“N”。

当所有教师完成问卷调查后，统计填“Y”与填“N”的比例.用频率估计概率，即可得到高一年级 50 位数师对新评价标准赞同比例的估计值.

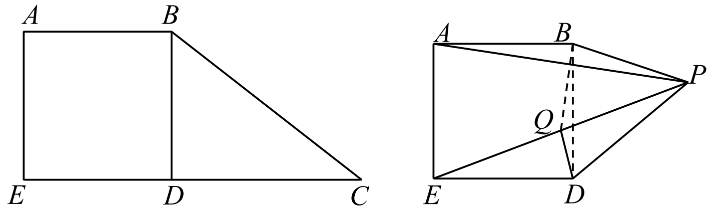
(1) 若用 X 表示按方案①填写问卷的人数，求 X 的数学期望；

(2) 若所有调查问卷中，填“Y”的问卷有 33 份，试估计高一年级 50 位教师对新评价标准的赞同比例 (用分数表示).

17. 如下左图, 在梯形 $ABCE$ 中, $AB \parallel CE$, D 为 CE 的中点, $BD \perp CE$, $CE=2AB=4$, $BD=2$, 将 $\triangle BCD$ 沿 BD 折叠,得到下右图所示的四棱锥 $P-ABDE$, 且使得二面角 $P-BD-A$ 的大小为 $\frac{2\pi}{3}$.

(1) 若 Q 为 PE 的中点, 证明: $PE\perp$ 平面 BDQ；

(2) 求平面 ABP 与平面 BPQ 所成的锐二面角的余弦值的大小.



18. 已知双曲线 $C: x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$.

(1) 若双曲线 C 与双曲线 $E: \dfrac{y^2}{4}-x^2=1$ 有相同的渐近线，求 b 的值；

(2) 在 (1) 的条件下，若过点 $P(0,-3)$ 且斜率为 k 的直线与双曲线 C 有且只有一个公共点，求 k 的值；

(3) 若双曲线 C 的左、右顶点分别为 A、B，过点 $D(2,0)$ 的直线 l 交双曲线 C 于不同的两点 M、N，连接 NO 并延长交双曲线 C 于点 Q，若 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BM}=2$，求 b 的取值范围.

19. 集合 M 满足下列条件, 则被称为“好集”.

①$M=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_k$，且对任意的 $1\leqslant \mathrm{i}<j\leqslant k$，$M_i\cap M_j=\varnothing$，其中 $k\geqslant 2$ 且为整数；

②每个集合 $U_i(1\leqslant \mathrm{i}\leqslant k)$ 中存在一个元素等于 M_i 中其他元素的和.

若集合 M 为“好集”，我们定义集合 $M_i(1\leqslant \mathrm{i}\leqslant k)$ 中最大的元素为集合 M 的一个主元，M 所有的主元构成的集合称为 M 的“主元子集”.

(1) 判断集合 $\{2,3,4,\cdots,10\}$ 是否为“好集”, 若是“好集”, 写出它的主元子集、若不是, 说明理由.

(2) 设 m、$n(m>n)$ 为正整数，若集合 $M=\{n,n+1,n+2,\cdots,m\}$ 为“好集”.

(i) 证明: $k\leqslant \dfrac{m-n+1}{3}$；

(ii) 证明: $m\geqslant 7n-4$.并写出等号成立时, M 的一个“主元子集”.

参考答案

1. B

【解析】集合 $M=\{1,2\}$, $N=\left\{x\in N^*\middle|\frac{8}{x}\in N^*\right\}=\{1,2,4,8\}$, 故 $M\cap N=\{1,2\}$.

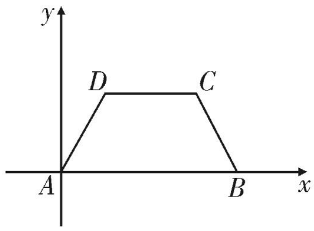
2. D

【解析】由复数 z 满足 $zi=\frac{3-i}{1+i}$(i 为虚数单位),

可得 $z=\frac{3-i}{i(1+\mathrm{i})}=\frac{3-i}{-1+i}=\frac{(3-\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}=\frac{-4-2i}{2}=-2-\mathrm{i}$, 所以 $|z|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

3. B

【解析】以 A 为原点, 射线 AB 为 x 轴正半轴建立直角坐标系, 如图所示:



$\because AB=2BC=2CD=2$, $\therefore \angle DAB=60^\circ$, 则 $A(0,0)$, $B(2,0)$,

设 $P\left(a,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 其中 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1+\frac{3}{2}$, 则 $\overrightarrow{PA}=\left(-a,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{PB}=\left(2-a,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-a)(2-a)+\frac{3}{4}=a^2-2a+\frac{3}{4}=(a-1)^2-\frac{1}{4}$,

$\therefore$ 当 $a=1$ 时, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取得最小值为 $-\frac{1}{4}$.

方法二: 极化恒等式

设 AB 的中点为 M, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PM}^2-\overrightarrow{MA}^2\geqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1^2=-\frac{1}{4}$,

当 P 为 CD 中点时, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取得最小值为 $-\frac{1}{4}$.

4. A

【解析】根据题意可得满足题意的选法种数为 $C_7^1\cdot A_6^3=840$.

5. C

【解析】$f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,

将函数图象向左平移 $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位长度, 得到的函数为 $g(x)=2\sin\left[2(x+\varphi)-\frac{\pi}{3}\right]=$

$2\sin\left(2x+2\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$,

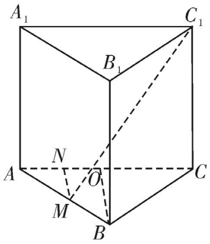
因为函数 $g(x)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称, 所以 $2\cdot\frac{\pi}{6}+2\varphi-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$,

解得 $\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$, 又因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$, 所以 C 正确.

6. D

【解析】如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 棱长均为 2，取 AC 的中点为 0，则 $BO\perp$ 平面 ACC_1A_1，当点 N 是靠近点 A 的四等分点时，$MN\,/\!/\,BO$，则 $MN\perp$ 平面 ACC_1A_1，此时直线 MN 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值

最大为1，当点N与C_1重合时，此时MN最长，即$MC_1=\sqrt{MC^2+CC_1^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$，因为正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$M$是棱$AB$的中点，所以点$M$到平面$ACC_1A_1$的距离为$\dfrac{BO}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，



此时直线MN(即MC_1)与平面ACC_1A_1所成角的正弦值最小，为$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，

所以直线MN与平面ACC_1A_1所成角的正弦值取值范围是$\left[\dfrac{\sqrt{21}}{14},1\right]$.

7. A

【解析】设圆的方程为$x^2+y^2=b^2$，$M(x_0,y_0)$，$N(0,y)$，$P(x,y)$，因为$\overrightarrow{NP}=\lambda\overrightarrow{NM}$，则$\overrightarrow{NP}=(x,0)=\lambda\overrightarrow{NM}=\lambda(x_0,y_0-y)$，所以$x=\lambda x_0$，$y_0=y$，即$x_0=\dfrac{x}{\lambda}$，$y_0=y$，因为$M(x,y)$是圆$x^2+y^2=b^2$上一点，所以$x_0^2+y_0^2=b^2$，所以$\dfrac{x^2}{\lambda^2}+y^2=b^2$，即$\dfrac{x^2}{b^2\lambda^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，所以$a^2=b^2\lambda^2$，而椭圆的离心率为：$\mathrm{e}=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{b^2\lambda^2}}=\dfrac{2}{3}$，所以$\dfrac{1}{\lambda^2}=\dfrac{5}{9}$，解得：$\lambda=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

8. C

【解析】因为$g(x)$为偶函数，所以$g(x)=g(-x)$，所以$g'(x)=-g'(-x)$，$g'(x)$是奇函数，所以$g'(0)=0$，因为$f(x)-g'(x)=2$，所以$f(0)-g'(0)=2$，所以$f(0)=2$

$f(x)-g'(x)=2$，$f(x-1)+g'(5-x)=2\Rightarrow f(4-x)+g'(x)=2$，

所以$f(4-x)+f(x)=4$，所以$f(1)+f(3)=4$，$f(2)=2$，$f(4)=f(0)=2$

又$f(x)=2+g'(x)=2-g'(-x)=f(x+4)$，所以4为函数$f(x)$的一个周期. 且$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=8f(1)+f(2)+\cdots+f(35)=8\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)+f(3)=70$.

9. AB

【解析】根据函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,-\pi<\varphi<\pi)$的部分图象，可得$A=2$，$\dfrac{T}{2}=\dfrac{5\pi}{12}-\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2\pi}{2\omega}$，由$\omega>0$，可得$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$，可得$A$正确；

可得$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，由$f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{6}\right)=2$，得$\varphi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，解得$\varphi=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$，$k\in Z$，由于$-\pi<\varphi<\pi$，可得$\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$，可得$f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$，由于$f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\left[2\times\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{2\pi}{3}\right]=2\sin0=0$，可得函数$f(x)$的图象关于点$\left(-\dfrac{\pi}{3},0\right)$对称，可得$B$正确；

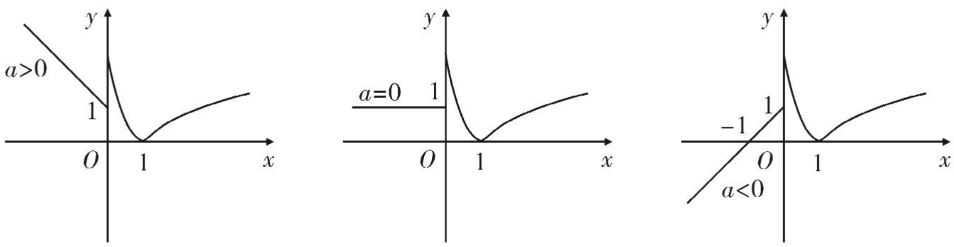
令$2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x+\dfrac{2\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$，$k\in Z$，解得$k\pi-\dfrac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{5\pi}{12}$，$k\in Z$，故函数$f(x)$的单调递减区间为$\left[k\pi-\dfrac{\pi}{12},k\pi+\dfrac{5\pi}{12}\right]$，$k\in Z$，则函数$f(x)$在区间$\left[\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right]$上先单调递增再单调递减再单调递增，可得$C$错误；因为$f(\lambda x)=2\sin\left(2\lambda x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$，$\lambda>0$，由$0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，得$\dfrac{2\pi}{3}\leqslant 2\lambda x+\dfrac{2\pi}{3}\leqslant\lambda\pi+\dfrac{2\pi}{3}$，若函数$f(\lambda x)(\lambda>0)$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上有且仅有两个零点和两个极值点，则$\dfrac{5\pi}{2}<\lambda\pi+\dfrac{2\pi}{3}<3\pi$，解得$\dfrac{11}{6}$

$<\lambda<\frac{7}{3}$,可得 D 错误.

10. ABD

【解析】对于 A, $a=2$ 时, $f(x)=\begin{cases}-x+1, x\leqslant 0\\ |\ln x|, x>0\end{cases}$, 由函数的图象知, 函数在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增, 故 A 正确;

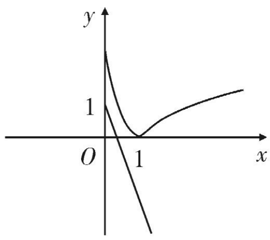
对于 B, $f(x)=\begin{cases}1-ax, x\leqslant 0\\ -\ln x, 0<x<1\\ \ln x, x>1\end{cases}$, 画出函数的图象, 如图所示,



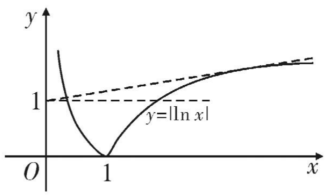
由题意可得, 函数 $f(x)$ 无最小值, 则 a 的取值范围为 $(-\infty,0)$, 故 B 正确;

对于 C, 设 $x>0$, 则 $-x<0$, $f(-x)=f(x)$, 则 $ax+1=|\ln x|$,

如图, 当 $a<0$ 时, $y=ax+1$ 与 $y=|\ln x|$ 并不一定有交点, 故 C 错误;



对于 D, 当 $x>0$ 时, 若 $f(-x)=f(x)$ 恰有 3 个根, 可得 $ax+1=|\ln x|(x>0)$ 有三个不同的根.



如图,作出函数 $y=|\ln x|$ 的图象,直线 $y=ax+1$ 过定点 $(0,1)$.

当 $x>1$ 时, 设过点 $(0,1)$ 的直线与曲线 $y=\ln x$ 的切点为 $(x_0,\ln x_0)$.

由 $y=\ln x$, 得 $y'=\frac{1}{x}$, 所以 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$,

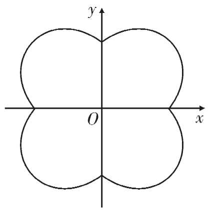
故切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$,

将点 $(0,1)$ 代入,得 $1-\ln x_0=-1$,即 $x_0=e^2$,所以切线的斜率为 $\frac{1}{e^2}$.

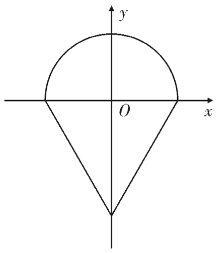
则 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$,故 D 正确.

11. ABD

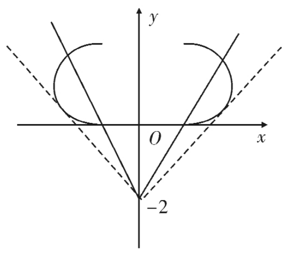
【解析】对于选项 A, 如图所示:



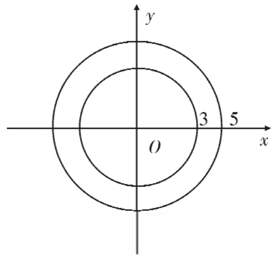
任意两点的距离都不超过$4\sqrt{2}$，故选项A正确；
对于选项B，如图所示:



故曲线C与曲线Γ围成的封闭区域包含6个整点$(0,0)$，$(-1,0)$，$(1,0)$，$(0,-2)$，$(0,-1)$，$(0,1)$，
故选项B正确;
对于选项C，如图所示:



当$x\geqslant0$时，曲线$\sqrt{1-(y-1)^2}=|x|-1$即$\sqrt{1-(y-1)^2}=x-1$，两边平方，
整理得$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$(x\geqslant1)$，表示以$C_1(1,1)$为圆心, 半径$r_1=1$的圆的右半圆;
当$x<0$时, 曲线$\sqrt{1-(y-1)^2}=|x|-1$即$\sqrt{1-(y-1)^2}=-x-1$，两边平方,
整理得$(x+1)^2+(y-1)^2=1$，$(x\leqslant-1)$. 表示以$C_2(-1,1)$为圆心, 半径$r_2=1$的圆的左半圆.
直线$kx-y-2=0$即$y=kx-2$，表示经过定点$A(0,-2)$、斜率为k的直线.
因此, 直线$kx-y-2=0$与曲线$\sqrt{1-(y-1)^2}=|x|-1$有两个不同的交点,
就是直线$kx-y-2=0$与两个半圆组成的图形有两个交点,
当直线$kx-y-2=0$与右半圆C_1有两个交点时, 记点$B(1,0)$,
可得直线到圆心的距离小于半径, 且直线的斜率小于或等于AB的斜率,
$\therefore\dfrac{|k-3|}{\sqrt{k^2+1}}<1$且$k\leqslant k_{AB}=\dfrac{-2-0}{0-1}=2$，解得$\dfrac{4}{3}<k\leqslant2$；
当直线$kx-y-2=0$与左半圆C_2有两个交点时, 同理解得$-2\leqslant k<-\dfrac{4}{3}$.
综上所述，实数k的取值范围是$\dfrac{4}{3}<k\leqslant2$或$-2\leqslant k<-\dfrac{4}{3}$，即$\left[-2,-\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(\dfrac{4}{3},2\right]$.
故k的取值范围为$\left[-2,-\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(\dfrac{4}{3},2\right]$.
对于选项D，如图，



点 $P(x,y)$ 所组成的图形是一个圆环，其面积为 16π，故选项 D 正确.

12. $\frac{31}{2}$

【解析】设 MN 的方程为: $y=k(x+2)$, $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,

联立方程: $\begin{cases} y=k(x+2) \\ y^2=6x \end{cases} \Rightarrow x_2x_1=4$, $4|FM|+|FN|=(4x_1+x_2)+\frac{5}{2}\times 3\geqslant 8+\frac{15}{2}=\frac{31}{2}$, 经验证可以取等号.

则 $4|FM|+|FN|$ 的最小值为 $\frac{31}{2}$.

13. 2760

【解析】当 n 为奇数时, $a_{n+2}-a_n=2$, 故数列 $\{a_n\}$ 的奇数项 a_1 , a_3 , $a_5\cdots$ 构成以 2 为公差的等差数列, 当 n 为偶数时, $a_{n+2}-a_n=4$, 所以 a_2 , a_4 , $a_6\cdots$ 构成以 4 为公差的等差数列,

故 $S_{60}=(a_1+a_3+\cdots+a_{59})+(a_2+a_4+\cdots+a_{60})=\left(30a_1+\frac{30\times 29}{2}\times 2\right)+\left(30a_2+\frac{30\times 29}{2}\times 4\right)=2760$.

14. 1

【解析】设 $AB=x$, $BD=1$, 则 $AC=\sqrt{2}$, 过 D 作垂线 DH 交 AB 于 H. 依题意有 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$, 所以 $\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times AB\times AD\times\sin\angle BAD+\frac{1}{2}\times AD\times AC\times\sin\angle DAC$,即 $AD=\frac{\sqrt{6}x}{x+\sqrt{2}}$.

在 $Rt\triangle ADH$ 中有 $DH=\frac{\sqrt{6}x}{x+\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}x}{2(x+\sqrt{2})}$, $AH=\frac{\sqrt{6}x}{x+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}x}{2(x+\sqrt{2})}$, 所以 $BH=x-AH=\frac{2x^2-\sqrt{2}x}{2(x+\sqrt{2})}$. 在 $Rt\triangle BDH$ 中, $BD^2=BH^2+HD^2$,即 $1=\left[\frac{2x^2-\sqrt{2}x}{2(x+\sqrt{2})}\right]^2+\left[\frac{\sqrt{6}x}{2(x+\sqrt{2})}\right]^2$,化简可得, $x^4-\sqrt{2}x^3+x^2-2\sqrt{2}x-2=0$, 即 $(x^2+2)(x^2-\sqrt{2}x-1)=0$, 解得 $x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$(舍负). 又 $\tan\angle ABC=\frac{DH}{BH}=\frac{\sqrt{6}x}{2x^2-\sqrt{2}x}=\frac{\sqrt{6}}{2x-\sqrt{2}}$, 所以 $\tan\angle ABC=1$.

参考方法: 设 $\angle ABC=\alpha$, $BD=x$, 则 $AD=\sqrt{2}x$.

在 $\triangle ABD$ 中,由正弦定理可得 $\frac{x}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{AD}{\sin\alpha}$ ①,

在 $\triangle ACD$ 中,由正弦定理可得 $\frac{\sqrt{2}x}{\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)}=\frac{AD}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}$ ②

由①②可得 $2\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)}$,解得 $\alpha=\frac{\pi}{4}$,可得 $\tan\alpha=1$,即 $\tan\angle ABC=1$.

15. (1) 由题知 $f'(x)=(6x+2a)e^{2x}+2e^{2x}(3x^2+2ax+a^2)=e^{2x}[6x^2+(4a+6)x+2a^2+2a]$,

所以 $f'(1)=(2a^2+6a+12)e^2$.

由题意可知 $(2a^2+6a+12)e^2=20e^2$,

解得 $a=1$(舍负).

(2) 由 (1) 知 $f(x)=e^{2x}(3x^2+2x+1)$,

$f'(x)=2e^{2x}(3x^2+2x+1)+e^{2x}(6x+2)=2(x+1)(3x+2)e^{2x}$,

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$ 时, $f'(x)>0$; 当 $x\in\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$ 时, $f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增, 在 $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$ 上单调递增.

所以当 $x=-1$ 时, $f(x)$ 取得极大值, $f(-1)=2e^{-2}$,

当 $x=-\frac{2}{3}$ 时, $f(x)$ 取得极小值, $f\left(-\frac{2}{3}\right)=e^{-\frac{4}{3}}$,

即 $f(x)$ 的极大值 $2e^{-2}$, $f(x)$ 的极小值 $e^{-\frac{4}{3}}$.

由于当 $x<-1$ 时, $f(x)>0$, $x\to-\infty$时, $f(x)\to0$, 当 $x\to+\infty$时, $f(x)\to+\infty$,

可知: $f(x)=m$ 有三个实数根时, $m\in\left(e^{-\frac{4}{3}},2e^{-2}\right)$.

16. (1) 每名教师每次抽取到偶数的概率为 $\frac{2}{5}$, 抽取到奇数的概率为 $\frac{3}{5}$,

每名教师两次抽取到的数字奇偶性不同的概率 $P=C_2^1\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$,

则 50 位教师中按方案①填写问卷的人数 $X\sim B\left(50,\frac{12}{25}\right)$,

所以 X 的数学期望 $E(X)=50\times\frac{12}{25}=24$.

(2) 记事件 A 为“按方案①填写问卷”,事件 B 为“按方案②填写问卷”,事件 C 为“在问卷中填“Y”。

由 (1) 知 $P(A)=\frac{12}{25}$, $P(B)=1-P(A)=\frac{13}{25}$,

$P(AC)=P(A)P(C|A)=\frac{12}{25}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{25}$.

$\because P(C)=\frac{33}{33+17}=\frac{33}{50}$, 由全概率公式 $P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$,

则 $\frac{33}{50}=\frac{6}{25}+\frac{13}{25}P(C|B)$, 解得 $P(C|B)=\frac{21}{26}$,

故根据调查问卷估计, 高一年级 50 位教师对新评价标准的赞同比例为 $\frac{21}{26}$.

17. (1) 证明: D 为 CE 的中点, $CE=2AB=2DE=4$,

所以 $DB=DC=DE=2$,

将 $\triangle BCD$ 沿 BD 折叠后,得到四棱锥 $P-ABDE$,

所以 $PD=DE=2$,又 Q 为 PE 的中点,所以 $PE\perp DQ$, ①

又 $BD\perp DC$ 即 $BD\perp PD$, $BD\perp DE$,

且 $PD\cap DE=D$, PD, $DE\subset$ 平面 PDE, 所以 $BD\perp$ 平面 PDE,

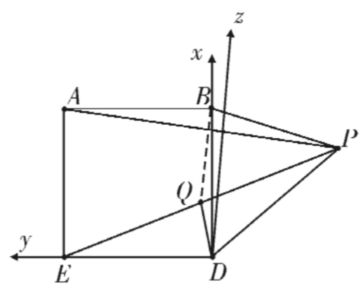
又 $PE\subset$ 平面 PDE, 所以 $PE\perp BD$, ②

又 $DQ\cap BD=D$, DQ, $BD\subset$ 平面 BDQ, ③

所以 $PE\perp$ 平面 BDQ.

(2) 因为 $BD\perp PD$, $BD\perp DE$,所以二面角 $P-BD-A$ 的平面角为 $\angle PDE=\frac{2\pi}{3}$,

以 D 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,



由题意 $P(0,-1,\sqrt{3})$, $A(2,2,0)$, $B(2,0,0)$, $E(0,2,0)$, 则 $Q\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

所以 $\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$, $\overrightarrow{BP}=(-2,-1,\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BQ}=\left(-2,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

设平面 ABP 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

由 $\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{BP}\cdot\vec{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y_1=0\\ -2x_1-y_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$, 令 $x_1=\sqrt{3}$, 则 $z_1=2$, $y_1=0$, 所以 $\vec{n}=(\sqrt{3},0,2)$,

因为 $\overrightarrow{PB}=(2,1,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{PQ}=\left(0,\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 设平面 BPQ 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$,

由 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{m}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_2+y_2-\sqrt{3}z_2=0\\ \frac{3}{2}y_2-\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=0\end{cases}$, 令 $x_2=1$, 则 $y_2=1$, $z_2=\sqrt{3}$, 所以 $\vec{m}=(1,1,\sqrt{3})$,

设平面 ABP 与平面 BPQ 所成的锐二面角为 θ,

所以 $\cos\theta=\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\left|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}\right|=\left|\frac{1\times\sqrt{3}+1\times0+\sqrt{3}\times2}{\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{3})^2}\times\sqrt{(\sqrt{3})^2+0^2+2^2}}\right|=\frac{3\sqrt{105}}{35}$,

所以平面 ABP 与平面 BPQ 所成角的余弦值的大小为 $\frac{3\sqrt{105}}{35}$.

18. (1) 由题意可得双曲线 $E:\frac{y^2}{4}-x^2=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm2x$, 又双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm bx$, 则 $b=2$.

(2) 当 $b=2$ 时,双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$,

由题意可知,直线的方程为 $y=kx-3$,

联立 $\begin{cases}y=kx-3\\ 4x^2-y^2=4\end{cases}$ 可得 $(4-k^2)x^2+6kx-13=0(*)$,

当 $4-k^2=0$ 时,即当 $k=\pm2$ 时,方程 (*) 即为 $6kx-13=0$,该方程只有一个解,合乎题意;

当 $4-k^2\neq0$ 时, 即当 $k\neq\pm2$ 时, 则 $\Delta=36k^2-4\times(4-k^2)\times(-13)=16(13-k^2)=0$, 解得 $k=\pm\sqrt{13}$.

综上所述,$k=\pm2$ 或 $\pm\sqrt{13}$.

(3) 由题知 $A(-1,0)$、$B(1,0)$,当直线 l 的斜率为 0 时,此时 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BM}=0$,不合题意,

则直线 l 的斜率不为 0, 则设直线 l 的方程为 $x=my+2$, 设点 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$,

根据 NO 延长线交双曲线 C 于点 Q,由双曲线对称性知 $Q(-x_2,-y_2)$,

联立有 $\begin{cases}x=my+2\\ x^2-\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow(b^2m^2-1)y^2+4b^2my+3b^2=0$,

显然二次项系数 $b^2m^2-1\neq0$, 其中 $\Delta=(4mb^2)^2-4(b^2m^2-1)3b^2=4b^4m^2+12b^2>0$,

由韦达定理可得 $y_1+y_2=\dfrac{-4b^2m}{b^2m^2-1}$ ①，$y_1y_2=\dfrac{3b^2}{b^2m^2-1}$ ②，

$\overrightarrow{AQ}=(-x_2+1,-y_2)$，$\overrightarrow{BM}=(x_1-1,y_1)$，

则 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BM}=(-x_2+1)(x_1-1)-y_1y_2=2$，

因为 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$ 在直线 l 上，则 $x_1=my_1+2$，$x_2=my_2+2$，

即 $(-my_2-1)(my_1+1)-y_1y_2=2$，即 $y_1y_2(m^2+1)+(y_1+y_2)m+3=0$，

将①②代入有 $(m^2+1)\cdot\dfrac{3b^2}{b^2m^2-1}+m\cdot\dfrac{-4b^2m}{b^2m^2-1}+3=0$，

即 $3b^2(m^2+1)-m\cdot4b^2m+3(b^2m^2-1)=0$ 化简得 $2b^2m^2+3b^2-3=0$，

所以 $m^2=\dfrac{3-3b^2}{2b^2}$，代入 $b^2m^2-1\neq0$，得 $\dfrac{3-3b^2}{2}-1\neq0$，所以 $b^2\neq\dfrac{1}{3}$，

且 $m^2=\dfrac{3-3b^2}{2b^2}\geqslant0$，解得 $b^2\leqslant1$，

由 $\Delta=(4mb^2)^2-4(b^2m^2-1)3b^2=4b^4m^2+12b^2>0$，

把 $m^2=\dfrac{3-3b^2}{2b^2}$ 代入，解得 $b^2<3$，又因为 $b^2>0$，则 $0<b^2\leqslant1$，

综上，$b^2\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3},1\right]$，$\therefore b\in\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right]$.

19. (1) 因为 $\{2,3,4,\cdots,10\}=\{10,7,3\}\cup\{9,5,4\}\cup\{8,6,2\}$，

故它是“好集”，它的主元集为 $\{8,9,10\}$.

(2) 设集合 M 被分拆为 k 个不相交的子集 $M_1,M_2,\cdots,M_k$ 满足题目的要求.

(i) 因为在任何一个子集中，元素均不同，且其中总有一个主元，所以，每个子集中均至少含有三个元素.

又集合 M 中总共有 $m-n+1$ 个元素，则 $k\leqslant\dfrac{m-n+1}{3}$.

(ii) 集合 M 中所有元素之和为 $S=\dfrac{(n+m)(m-n+1)}{2}$. 考虑每个子集中元素的和.

若 a_i 为子集 M_i 的主元，则 M_i 的所有元素和就是 $2a_i$.

显然，所有子集的元素之和小于或等于 $2(m+(m-1)+\cdots+(m-k+1))=(m+m-k+1)k\leqslant$

$\left(2m+1-\dfrac{m-n+1}{3}\right)\dfrac{m-n+1}{3}=\dfrac{(5m+n+2)(m-n+1)}{9}$.

最后一个不等式成立是因为 $k\leqslant\dfrac{m-n+1}{3}\leqslant\dfrac{m+1}{3}\leqslant\dfrac{2m+1}{2}$.

故 $S=\dfrac{(n+m)(m-n+1)}{2}\leqslant\dfrac{(5m+n+2)(m-n+1)}{9}\Leftrightarrow9(n+m)\leqslant2(5m+n+2)\Leftrightarrow m\geqslant7n-4$

下表为 $m=7n-4$ 时，满足题目要求的一个分拆.

M_1	M_2	...	...	...	...	...	...	...	...	...	M_{2n-1}
$7n-4$	$7n-5$	$7n-6$	...	$6n-2$	$6n-3$	$6n-4$	$6n-5$	$6n-6$	...	$5n-1$	$5n-2$
$5n-3$	$5n-5$	$5n-7$	...	$3n+1$	$3n-1$	$5n-4$	$5n-6$	$5n-8$	...	$3n+2$	$3n$
$2n-1$	$2n$	$2n+1$	...	$3n-3$	$3n-2$	n	$n+1$	$n+2$	...	$2n-3$	$2n-2$

故 M 的一个主元子集为 $\{5n-2,5n-1,\cdots,7n-5,7n-4\}$.