陕西省西安市新城区2026届高三上学期第三次模拟

数学试题

★祝大家学习生活愉快★

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分，每小题只有一个选项符合要求

1. 已知集合 $M=\{-1,0,1,2\}$，$N=\{y\mid y=2^x,x>-1\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{-1,0\}$　　D. $\{1\}$

2. 设随机变量 X 服从二项分布 $B(6,p)(0<p<1)$，若 $E(X)=\dfrac{3}{2}$，则 $p=$

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{6}$

3. 已知线段 AB 的长为 $2\sqrt{2}$，且线段 AB 在平面 α 上的射影长为 $\sqrt{6}$，则直线 AB 与 α 所成角的大小为

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 75°

4. 若函数 $f(x)=\sin x+\cos(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 是奇函数，则 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=$

A. 0　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

5. 若一个等比数列的前3项和等于3，前6项和等于 -21，则该等比数列的第4项等于

A. 16　　B. 8　　C. -4　　D. -8

6. 已知函数 $f(x)=\ln(x^2-ax+2)$ 在 $(2,+\infty)$ 单调递增，则 a 的取值范围是

A. $(3,4]$　　B. $[3,4]$　　C. $(-\infty,3]$　　D. $(-\infty,4]$

7. 设 A，B，C 是半径为1的圆上三点，若 $AB=1$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最大值为

A. 1　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

8. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线交 C 于 A，B 两点，且 $AF_2\perp BF_2$，则 $|AB|=$

A. $\dfrac{64}{17}$　　B. $\dfrac{72}{17}$　　C. $\dfrac{8\sqrt{17}}{9}$　　D. $\dfrac{17\sqrt{5}}{8}$

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 设 $z_1=2+\mathrm{i}$，$z_2=1-2\mathrm{i}$，则

A. $|z_1|=|z_2|$　　B. $z_1-z_2=1+\mathrm{i}$　　C. $|z_1+z_2|=\sqrt{10}$　　D. $z_1\overline{z_2}=\overline{z_1}z_2$

10. 已知抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F，P 为 C 上一动点，点 $A\left(\frac{11}{6},2\right)$，$B(3,3)$，则

A. $|PF|-|PA|\leqslant\frac{13}{6}$　　B. $|PF|+|PB|\geqslant 4$　　C. $|PA|-|PB|\leqslant\frac{5}{4}$　　D. $|PA|+|PB|\geqslant\frac{11}{6}$

11. 已知曲线 $C: y=2x^3-3x^2+3$，则

A. 直线 $y=2$ 与 C 的公共点数不等于直线 $y=3$ 与 C 的公共点数

B. 所有斜率为 $-\frac{3}{2}$ 的直线都与 C 有且仅有一个公共点

C. 直线 $y=\frac{5}{2}$ 与 C 的所有公共点的横坐标的平方和等于 $\frac{9}{4}$

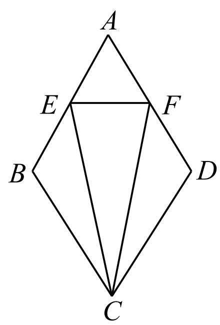
D. C 上横坐标的差为 $\frac{3}{2}$ 的两点中至少有一个点的纵坐标的绝对值大于2

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分

12. 某中学高三年级男生的身高 X(单位: cm) 可近似看作服从正态分布 $N(175,\sigma^2)$，且 $P(170<X<180)=0.7$,则 $P(X>170)=$______.

13. 函数 $f(x)=x\sqrt{2-x^2}-x^2$ 的最大值为______.

14. 如图, 菱形 $ABCD$ 的各点都在同一平面上, 且边长为4，$\angle BAD=60^\circ$.设 E，F 分别为 AB, AD 的中点，分别以 CE，EF，CF 为折痕把 $\triangle BCE$，$\triangle AEF$，$\triangle DCF$ 折起，使点 B，A，D 重合于点 P，并构成三棱锥 $P-CEF$. 若三棱锥 $P-CEF$ 的各顶点都在同一球面上,则该球的体积为______.



四、解答题：本题共5小题，共77分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c、已知 $2a\cos C+2c\cos A=a+c$.

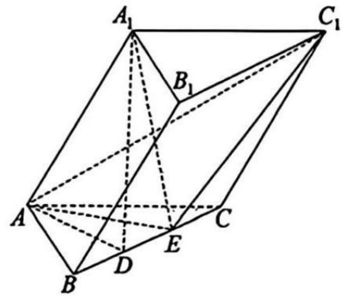
(1) 证明: $2b=a+c$；

(2) 设 $A=\frac{2\pi}{3}$，$a=7$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E 为 BC 上的点，且 $BD=DE=EC$.

(1) 证明: A_1D // 平面 AC_1E；

(2) 若底面 ABC 是等边三角形，侧面 AA_1C_1C 是菱形，$\angle A_1AC=60^\circ$，且平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABC，求二面角 $D-AA_1-E$ 的正弦值.



17. 已知 $A(1,0)$ 和 $M(2,3)$ 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上两点.

(1) 求 C 的离心率；

(2) 在 C 上是否存在点 B，使得 $\triangle ABM$ 的面积为 3？若存在，求所有满足要求的点 B 的坐标；若不存在，说明理由.

18. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}+\dfrac{1}{4}\cos 2x-\dfrac{5}{4}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $x>0$ 时，$f(x)>x$；

(3) 设 s , t 为正数，若点 (s,t) 关于直线 $y=x$ 的对称点在曲线 $y=f(x)$ 上，

证明: $\dfrac{s^{2}}{t}<f(s)<\underbrace{f(f(\cdots f}_{2026个f}(t)\cdots))$.

19. 光明中学举行校乒乓球比赛，共有 $2m$ 人报名参加男子单打比赛，参赛选手的编号记为 1 , 2 ,$\cdots$, $2m$，并将所有选手分成 A , B 两组, 每组各 m 人，其中 m 为不小于 10 的整数.

(1) 若 $m=10$，求编号为 10 和 20 的选手都在 A 组的概率；

(2) 若编号为 m 和 $2m$ 的选手都在 A 组，证明: 在 B 组选手中总能找出 2 人，使得他们的编号之和等于 $2m$；

(3)A 组选手与 B 组选手一对一比赛后共有 m 人晋级.已知在晋级的选手中有不超过 10% 的选手退赛，证明: 在晋级且没有退赛的选手中总能找出 4 人，使得在这 4 人中有 2 人的编号之和等于另外 2 人的编号之和.

参考答案

1. B

【解析】因为集合 $M=\{-1,0,1,2\}$, $N=\left\{y \middle| y>\frac{1}{2}\right\}$, 故 $M\cap N=\{1,2\}$.

2. C

【解析】因为随机变量 X 服从二项分布 $B(6,p)(0<p<1)$, 故 $E(X)=6p=\frac{3}{2}$, $p=\frac{1}{4}$.

3. A

【解析】设直线 AB 与 α 所成角为 $\theta(0^\circ\leqslant\theta\leqslant90^\circ)$, 因为线段 $AB=2\sqrt{2}$, 且线段 AB 在平面 α 上的射影长为 $\sqrt{6}$, 故 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\theta=30^\circ$.

4. D

【解析】因为 $f(x)=\sin x+\cos(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 是奇函数, 故 $f(0)=\cos\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, 所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

5. D

【解析】记该等比数列为 $\{a_n\}$, 其公比为 q, 且前 n 项和为 S_n, 若 $q=1$, 则显然不成立, 若 $q\neq1$, 则根据题意可知 $S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=3$, $S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=-21$, 解得 $a_1=1$, $q=-2$, 故 $a_4=a_1q^3=-8$.

6. C

【解析】若 $f(x)=\ln(x^2-ax+2)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 单调递增, 则需满足 $\frac{a}{2}\leqslant2$, 且 $4-2a+2\geqslant0$, 故 $a\leqslant3$, 即 a 的取值范围是 $(-\infty,3]$.

7. B

【解析】过 C 作 $CH\perp AB$, 垂足为 H, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=|\overrightarrow{AH}|$, 故当 $|\overrightarrow{AH}|$ 取得最大值时, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值最大. 设圆心为 O, 因为圆的半径为 1, 故 $\triangle AOB$ 是边长为 1 的等边三角形, 且当 CH 与圆 O 相切时, $|\overrightarrow{AH}|$ 的值最大, 由几何关系可知 $|\overrightarrow{AH}|$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$, 故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

8. A

【解析】设 $|AF_2|=m$, $|BF_2|=n$, 则根据椭圆的定义可知 $|AF_1|=4-m$, $|BF_1|=4-n$, 且 $|AB|=|AF_1|+|BF_1|=8-m-n$, 又易知 $|F_1F_2|=2\sqrt{3}$, 因为 $\angle AF_1F_2+\angle BF_1F_2=180^\circ$, 故由余弦定理有 $\cos\angle AF_1F_2+\cos\angle BF_1F_2=\frac{(4-m)^2+12-m^2}{4\sqrt{3}(4-m)}+\frac{(4-n)^2+12-n^2}{4\sqrt{3}(4-n)}=0$, 整理得 $56-15(m+n)+4mn=0$. 又因为 $AF_2\perp BF_2$, 故由勾股定理有 $(8-m-n)^2=m^2+n^2$, 整理得 $32-8(m+n)+mn=0$, 由以上解得 $m+n=\frac{72}{17}$, 所以 $|AB|=8-m-n=\frac{64}{17}$.

9. AC

【解析】因为 $z_1=2+\mathrm{i}$, $z_2=1-2\mathrm{i}$, 故 $|z_1|=|z_2|=\sqrt{5}$, $z_1-z_2=1+3\mathrm{i}$, $|z_1+z_2|=|3-\mathrm{i}|=\sqrt{10}$, $z_1\overline{z_2}=(2+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})=5\mathrm{i}$, $\overline{z_1}z_2=(2-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=-5\mathrm{i}$, 故 $z_1\overline{z_2}\neq\overline{z_1}z_2$, 综上, A, C 正确, B, D 错误.

10. ABD

【解析】根据题意可知 F 的坐标为 $(1,0)$, 因为 $A\left(\frac{11}{6},2\right)$, 故 $|PF|-|PA|\leqslant|AF|=\frac{13}{6}$, 当且仅当 P, A, F

共线时等号成立, 此时 $P\left(\frac{9}{4},3\right)$, 故 A 正确; 设 P 在 C 的准线上的射影为 H, 因为 $B(3,3)$, 故 $|PF|+|PB|=|PH|+|PB|\geqslant|BH|$, 当且仅当 B, P, H 共线时等号成立, 此时 $P\left(\frac{9}{4},3\right)$, $|BH|=4$, 故 B 正确; 故 $|PA|-|PB|\leqslant|AB|=\frac{\sqrt{85}}{6}$, 当且仅当 P, B, A 共线时等号成立, 故 C 错误;

由 A, B 选项可知 $|PA|+|PB|=-(|PF|-|PA|)+(|PF|+|PB|)\geqslant-\frac{13}{6}+4=\frac{11}{6}$, 当且仅当 P 的坐标为 $\left(\frac{9}{4},3\right)$ 时等号成立, 故 D 正确.

11. BC

【解析】设 $f(x)=2x^3-3x^2+3$, 则 $f'(x)=6x^2-6x$, 令 $f'(x)=0$, 则 $x=0$ 或 $x=1$, 当 $x<0$ 或 $x>1$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $0<x<1$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x)$ 的极大值是 $f(0)=3$, 极小值是 $f(1)=2$. 故直线 $y=2$ 与 C 有 2 个公共点, 直线 $y=3$ 与 C 也有 2 个公共点, 故 A 错误; 设 $g(x)=f(x)+\frac{3}{2}x-b=2x^3-3x^2+\frac{3}{2}x-b+3$, 则 $g'(x)=6x^2-6x+\frac{3}{2}=6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant0$, $g(x)$ 单调递增, 且当 $x\to-\infty$时, $f(x)\to-\infty$, 当 $x\to+\infty$时, $f(x)\to+\infty$, 故 $g(x)$ 有且仅有一个零点, 即所有斜率为 $-\frac{3}{2}$ 的直线都与 C 有且仅有一个公共点, 故 B 正确; 由上可知直线 $y=\frac{5}{2}$ 与 C 有 3 个公共点, 设它们的横坐标分别为 x_1, x_2, x_3, 则 $2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=f(x)-\frac{3}{2}$, 故有 $x_1+x_2+x_3=\frac{3}{2}$, 且 $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0$, 所以 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=\frac{9}{4}$, 故 C 正确; 因为 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(1)=2$, 故 D 错误.

12. 0.85

【解析】因为 X(单位: cm) 服从正态分布 $N(175,\sigma^2)$, 且 $P(170<X<180)=0.7$, 故 $P(X>170)=1-\frac{1}{2}[1-P(170<X<180)]=0.85$.

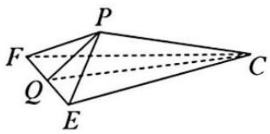
13. $\sqrt{2}-1$

【解析】设 $x=\sqrt{2}\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,

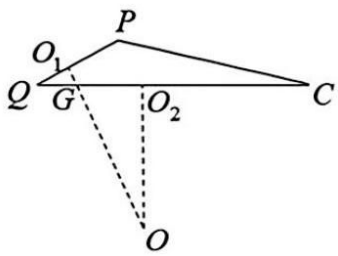
则 $f(x)=\sqrt{2}\cos\theta\sqrt{2-2\cos^2\theta}-2\cos^2\theta=\sin2\theta-\cos2\theta-1=\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)-1$, 故当 $2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 时, 即 $\theta=\frac{3\pi}{8}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\sqrt{2}-1$.

14. $32\sqrt{3}\pi$

【解析】连接 AC 交 EF 于点 Q, 把 $\triangle BCE$, $\triangle AEF$, $\triangle DCF$ 折起后构成的三棱锥 $P-CEF$ 如图所示, 其中 $\triangle PEF$ 是边长为 2 的正三角形,



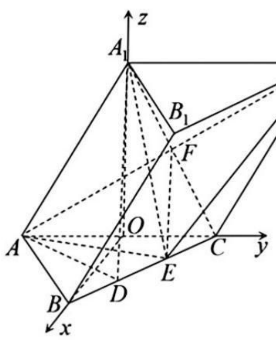
$PC=4$, $PQ=\sqrt{3}$, $CQ=3\sqrt{3}$, 设 O_1 为 $\triangle PEF$ 的外心, 则 O_1 在 PQ 上, 且 $O_1Q=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 设 O_2 为 $\triangle CEF$ 的外心, 则 O_2 在 CQ 上, 故过 O_1 且垂直于 PQ 的直线与过 O_2 且垂直于 CQ 的直线的交点即为球心, 设该点为 O, 如图所示. 另设 OO_1 交 CQ 于点 G, 在 $\triangle CEF$ 中, $EO_2=CO_2$, $EQ=1$,



故 $\sqrt{EO_2^2-1}+EO_2=CQ=3\sqrt{3}$，故 $EO_2=\dfrac{14\sqrt{3}}{9}$，$QO_2=\dfrac{13\sqrt{3}}{9}$，在 $\triangle CPQ$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle CQP=\dfrac{7}{9}$，故 $GQ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{9}{7}=\dfrac{3\sqrt{3}}{7}$，$O_2G=\dfrac{13\sqrt{3}}{9}-\dfrac{3\sqrt{3}}{7}=\dfrac{64\sqrt{3}}{63}$，又 $\cos\angle O_1OO_2=\cos\angle CQP=\dfrac{7}{9}$，所以 $\tan\angle O_1OO_2=\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$，故 $OO_2=\dfrac{64\sqrt{3}}{63}\times\dfrac{7}{4\sqrt{2}}=\dfrac{8\sqrt{6}}{9}$，球半径 $R=OC=\sqrt{OO_2^2+CO_2^2}=2\sqrt{3}$，故球的体积为 $\dfrac{4\pi R^3}{3}=32\sqrt{3}\pi$.

15. (1) 因为 $2a\cos C+2c\cos A=a+c$，且 A，B，C 是 $\triangle ABC$ 的内角，
故由正弦定理得 $2\sin A\cos C+2\sin C\cos A=\sin A+\sin C$,
进一步有 $2\sin A\cos C+2\sin C\cos A=2\sin(A+C)=2\sin B=\sin A+\sin C$,
再由正弦定理有 $2b=a+c$.
(2) 由余弦定理有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.
因为 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，$a=7$，且由 (1) 知 $2b=a+c$,
故 $c=2b-7$，$49=b^2+(2b-7)^2-2b(2b-7)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，整理有 $b^2-5b=0$,
解得 $b=5$ 或 $b=0$(不合题意，舍去)，故 $c=2b-7=3$.
所以由三角形面积公式有 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times5\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

16. (1) 如图，连接 A_1C 交 AC_1 于点 F，连接 EF，因为 A_1ACC_1 是平行四边形，故 F 为 A_1C 的中点，又 $DE=EC$，故 EF 为 $\triangle A_1CD$ 的中位线，所以 $EF\parallel A_1D$.
因为 $EF\subset$ 平面 AC_1E，$A_1D\not\subset$ 平面 AC_1E，所以 $A_1D\parallel$ 平面 AC_1E.
(2) 设 AC 的中点为 O，因为底面 ABC 是等边三角形，侧面 AA_1C_1C 是菱形，$\angle A_1AC=60^\circ$，且平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABC，连接 OB，OA_1，则 $OB\perp AC$，又 $A_1O\perp AC$，且平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $ABC=AC$，故 $A_1O\perp$ 平面 ABC. 以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$ 的方向为 x 轴正方向，$\overrightarrow{OC}$ 的方向为 y 轴正方向，$\overrightarrow{OA_1}$ 的方向为 z 轴正方向建立空间坐标系.



设 $AB=2$，则由几何关系可知
$A(0,-1,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$D\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{3},0\right)$，$E\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2}{3},0\right)$,

故 $\overrightarrow{AA_1}=(0,1,\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{4}{3},0\right)$, $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{5}{3},0\right)$.

设平面 AA_1D 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$, 平面 AA_1E 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则有 $\begin{cases}\frac{2\sqrt{3}}{3}x_1+\frac{4}{3}y_1=0,\\ y_1+\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{3}x_2+\frac{5}{3}y_2=0,\\ y_2+\sqrt{3}z_2=0.\end{cases}$

不妨取 $x_1=1$, $x_2=1$, 则 $\vec{m}=\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\vec{n}=\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{5},\frac{1}{5}\right)$.

故 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{1\times1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}{\sqrt{1+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\times\sqrt{1+\frac{3}{25}+\frac{1}{25}}}=\frac{7\sqrt{58}}{58}$.

故二面角 $D-AA_1-E$ 的正弦值为 $\sqrt{1-\left(\frac{7\sqrt{58}}{58}\right)^2}=\frac{3\sqrt{58}}{58}$.

17. (1) 由题意得 $\begin{cases}\frac{1}{a^2}=1,\\ \frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=1,\\ b^2=3.\end{cases}$

所以 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=2$.

(2) 方法 1 : 假设存在满足条件的点 B, 且设 l 为直线 BM.

当 l 垂直于 x 轴时, $B(2,-3)$, $\triangle ABM$ 的面积为 3, 满足题意.

当 l 不垂直于 x 轴时, 设直线 l 的方程为 $y-3=k(x-2)$.

由 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx-2k+3\end{cases}$ 得 $(3-k^2)x^2+2k(2k-3)x-(2k-3)^2-3=0$.

由 $\Delta>0$, 得 $k\neq2$. 设 $B(x_B,y_B)$, 则 $x_B=\frac{2k(2k-3)}{k^2-3}-2=\frac{2k^2-6k+6}{k^2-3}$.

因此 $|MB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_B-2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{6|k-2|}{|k^2-3|}$,

又 A 到 l 的距离为 $\frac{|k-3|}{\sqrt{1+k^2}}$, 故 $\triangle ABM$ 的面积为 $\frac{1}{2}|MB|\cdot d=\frac{3|k^2-5k+6|}{|k^2-3|}$.

所以 $\frac{3|k^2-5k+6|}{|k^2-3|}=3$, 故 $k^2-5k+6=k^2-3$ 或 $k^2-5k+6=-k^2+3$, 解得 $k=\frac{9}{5}$ 或 $k=1$ 或 $k=\frac{3}{2}$. 又 $x_B=\frac{2k^2-6k+6}{k^2-3}$, 故当 $k=\frac{9}{5}$ 时, $x_B=7$, 再由 $l:y-3=\frac{9}{5}(x-2)$ 得 $y_B=12$,

故 $B(7,12)$; 同理, 当 $k=1$ 时, $B(-1,0)$; 当 $k=\frac{3}{2}$ 时, $B(-2,-3)$.

综上, 所有满足要求的点 B 的坐标为 $(2,-3)$, $(7,12)$, $(-1,0)$, $(-2,-3)$.

方法 2 : 根据题意有 $|AM|=\sqrt{(2-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$,

直线 AM 的方程为 $y=3x-3$.

假设存在满足条件的点 B , 设点 B 到直线 AM 的距离为 d,

若 $\triangle ABM$ 的面积为 3 , 则 $\frac{1}{2}d\cdot|AM|=3$, 故 $d=\frac{6}{\sqrt{10}}$.

设过 B 且平行于直线 AM 的直线为 $l:y=3x+b$, 则 $d=\frac{|b+3|}{\sqrt{10}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$, 故 $b=3$ 或 $b=-9$.

当 $b=3$ 时, $l:y=3x+3$, 与 C 的方程联立有 $x^2+3x+2=0$,

解得 $x_1=-1$, $x_2=-2$, 代入 l 的方程得 $B(-1,0)$ 或 $B(-2,-3)$;

当 $b=-9$ 时, $l:y=3x-9$, 与 C 的方程联立有 $x^2-9x+14=0$,
解得 $x_3=2$, $x_4=7$, 代入 l 的方程得 $B(2,-3)$ 或 $B(7,12)$.
综上, 所有满足要求的点 B 的坐标为 $(-1,0)$, $(-2,-3)$, $(2,-3)$, $(7,12)$.

18. (1) 根据题意有 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\sin 2x$.

当 $x\geqslant 0$ 时, $f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\sin 2x\geqslant \mathrm{e}^0-\frac{1}{2}>0$;

当 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时, $-\pi<2x<0$, $\sin 2x<0$, 故 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\sin 2x>0$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 单调递增.

(2) 设 $g(x)=f(x)-x=\mathrm{e}^x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{5}{4}-x$, 则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\sin 2x-1$,

设 $h(x)=g'(x)$, 则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-\cos 2x$, 当 $x>0$ 时, $h'(x)\geqslant \mathrm{e}^x-1>0$, $h(x)$ 单调递增,

故 $g'(x)=h(x)>h(0)=0$, 故 $g(x)$ 单调递增,

故当 $x>0$ 时, $g(x)>g(0)=0$, 即 $f(x)>x$.

(3) 因为点 (s,t) 关于直线 $y=x$ 的对称点为 (t,s),且在 $y=f(x)$ 上,故 $f(t)=s$

由 (1) 可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增,且由 (2) 可知 $s<f(s)$,

故 $f(s)<f(f(s))<\cdots<\underbrace{f(f(\cdots f}_{2025个f}(s)\cdots))=\underbrace{f(f(\cdots f(f}_{2026个f}(t))\cdots))$.

由 $f(t)=s$ 可知, $f(s)>\frac{s^2}{t}$ 等价于 $\frac{f(s)}{s}>\frac{f(t)}{t}$.

设 $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{\mathrm{e}^x}{x}+\frac{\cos 2x}{4x}-\frac{5}{4x}(x>0)$, 则 $\varphi'(x)=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}-\frac{2x\sin 2x+\cos 2x}{4x^2}+\frac{5}{4x^2}$.

设 $k(x)=4(x-1)\mathrm{e}^x-2x\sin 2x-\cos 2x+5$, 则当 $x>0$ 时, $k'(x)=4x(\mathrm{e}^x-\cos 2x)>0$,

故当 $x>0$ 时, $k(x)$ 单调递增, $k(x)>k(0)=0$,

所以当 $x>0$ 时, $\varphi'(x)=\frac{k(x)}{4x^2}>0$, $\varphi(x)$ 单调递增. 15 分

又由上及 (2) 可知, $s=f(t)>t>0$, 所以 $\varphi(s)>\varphi(t)$, 即 $f(s)>\frac{s^2}{t}$.

综上, $\frac{s^2}{t}<f(s)<\underbrace{f(f(\cdots f}_{2026个f}(t)\cdots))$.

19. (1) 编号为 10 和 20 的选手都在 A 组的概率 $P=\frac{C_2^2C_{18}^8}{C_{20}^{10}}=\frac{9}{38}$.

(2) 设 B 组选手的编号分别为 $b_1,b_2,\cdots,b_m$,因为编号为 m 和 $2m$ 的选手都在 A 组,
故 $b_1,b_2,\cdots,b_m,2m-b_1,2m-b_2,\cdots,2m-b_m$ 这 $2m$ 个数的值只能取 $1,2,\cdots,2m-1$ 这 $2m-1$ 个值,
故它们中必有两个数相等.
因为 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 互不相等, 所以 $2m-b_1,2m-b_2,\cdots,2m-b_m$ 也互不相等,
故一定存在 $b_i=2m-b_j$, 其中 $\mathrm{i},j\in\{1,2,\cdots,m\}$,
又因为 $b_i\neq m$, $b_j\neq m$, 故存在 $\mathrm{i}\neq j$, 使得 $b_i+b_j=2m$,
即在 B 组选手中总能找出 2 人,使得他们的编号之和等于 $2m$.

(3) 设晋级且没有退赛的选手共有 n 人,他们组成集合 $M=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,其中 a_1 表示选手的编号, $\mathrm{i}=1$, $2,\cdots,n$, 且 $a_1<a_2<\cdots<a_n$, $\frac{9m}{10}\leqslant n\leqslant m$.

假设 M 中不存在 4 个元素满足其中 2 个元素之差等于另 2 个元素之差.

(i) 当 n 为奇数时, 考虑两组差:

$\{a_2-a_1, a_4-a_3, \cdots, a_{n-1}-a_{n-2}\}$ 和 $\{a_3-a_2, a_5-a_4, \cdots, a_n-a_{n-1}\}$.

根据假设可知每组的差数都是互不相同的正整数, 故

$(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_{n-2}) \geqslant 1+2+\cdots+\frac{n-1}{2}=\frac{n^2-1}{8}$,

$(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+\cdots+(a_n-a_{n-1}) \geqslant 1+2+\cdots+\frac{n-1}{2}=\frac{n^2-1}{8}$.

两式相加有 $2m \geqslant a_n \geqslant a_n-a_1+1=\sum_{t=1}^{n-1}(a_{t+1}-a_t)+1 \geqslant \frac{n^2+3}{4}$.

(ii) 当 n 为偶数时, 考虑两组差:

$\{a_2-a_1, a_4-a_3, \cdots, a_n-a_{n-1}\}$ 和 $\{a_3-a_2, a_5-a_4, \cdots, a_{n-1}-a_{n-2}\}$.

根据假设可知每组的差数都是互不相同的正整数,

故 $(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1}) \geqslant 1+2+\cdots+\frac{n}{2}=\frac{n^2+2n}{8}$,

$(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+\cdots+(a_{n-1}-a_{n-2}) \geqslant 1+2+\cdots+\frac{n-2}{2}=\frac{n^2-2n}{8}$.

两式相加有 $2m \geqslant a_n \geqslant a_n-a_1+1=\sum_{t=1}^{n-1}(a_{t+1}-a_t)+1 \geqslant \frac{n^2+4}{4}$.

故若 $2m<\frac{n^2+3}{4}$, 即 $n>\sqrt{8m-3}$ 时, M 中一定存在 4 个元素满足其中 2 个元素之差等于另 2 个元素之差, 也等价于其中 2 个元素之和等于另 2 个元素之和.

又因为当 $m \geqslant 10$ 时, $\frac{9m}{10}>\sqrt{8m-3}$, 故 $n>\sqrt{8m-3}$, 所以在晋级且没有退赛的选手中总能找出 4 人, 使得其中 2 人的编号之和等于另外 2 人的编号之和.