黑龙江省九师联盟校2025－2026学年高三上学期1月联考

数学试题

★祝大家学习生活愉快★

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分，每小题只有一个选项符合要求

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2+x<0\}$，$B=\{x\mid x\geqslant 0\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{x\mid -1<x\leqslant 0\}$　　B. $\{x\mid x<-1$ 或 $x\geqslant 0\}$

C. $\{x\mid x>-1\}$　　D. R

2. 在复平面内，复数 $z=\dfrac{3+7i}{i}$ 对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 若向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(0,3)$，$\vec{a}\perp\left(\vec{a}+k\vec{b}\right)$，则实数 $k=$

A. $\dfrac{5}{6}$　　B. $-\dfrac{5}{6}$　　C. 0　　D. $-\dfrac{1}{2}$

4. 已知直线 $l:x-y-4=0$，圆 $C:(x-1)^2+(y+1)^2=3$，则直线 l 与圆 C 的位置关系是

A. 相交　　B. 相离　　C. 相切　　D. 无法确定

5. 某中学举办迎国庆歌咏比赛，邀请了七位评委，对一个选手打分后，得到一组互不相等的数据 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，去掉其中最高分与最低分得到的数据与原始数据一定相同的是

A. 平均分　　B. 极差　　C. 标准差　　D. 中位数

6. 将数列 $\{2n-1\}$ 和数列 $\{n^2\}$ 的公共项按从小到大的次序组成数列 $\{a_n\}$，则 $a_{10}=$

A. 441　　B. 361　　C. 121　　D. 100

7. 若函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期为 T，且 $\dfrac{1}{2}<T<1$，$f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$ 对称，则 $f(2026)=$

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. $-\sqrt{2}$

8. 设函数 $f(x)=\log_2(4^x+1)-x$，令 $a=f\left(\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}\right)$，$b=f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)$，$c=f\left(\tan\dfrac{7}{4}\pi\right)$，则 a，b，c 的大小关系为

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$　　C. $c<b<a$　　D. $b<c<a$

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 已知两条不同的直线 a，b，两个不同的平面 α，β，则下列命题为真命题的是

A. 若 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，则 $a\,/\!/\,b$　　B. 若 $a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，则 $\alpha\,/\!/\,\beta$

C. 若 $a\,/\!/\,\alpha$，$a\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$　　D. 若 $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a\,/\!/\,\beta$，$b\,/\!/\,\beta$，则 $\alpha\,/\!/\,\beta$

10. 已知函数 $f(x)=(x-1)^2(x+2)$，则

A. $f'(0)=-3$　　B. $f(x)$ 的极值都大于0

C. $f(\sqrt{x}+2)\geqslant 4$　　D. 若 $x\in(0,1)$，则 $f(\sqrt{x})>f(x^2)$

11. 伽利略说：大自然是一本用数学语言写成的书.人们在自然界中发现了斐波那契数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\in N^*)$，斐波那契数列在动植物生长、艺术设计和金融市场都有广泛应用.下列关于斐波那契数列 $\{a_n\}$ 的正确结论是

A. $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_{n+2}-1$　　B. $a_{n+1}^2-a_{n-1}^2=a_{2n+1}(n\geqslant 2)$

C. $a_3+a_6+\cdots+a_{3n}=\frac{1}{2}(a_{3n+2}-1)$　　D. $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=a_na_{n+1}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分

12. 已知 $x>0$，$y>0$，$xy=49$，则 $x+y$ 的最小值为______.

13. 碳14是一种著名的放射性物质,当生物死亡后,体内碳14含量按确定的比率衰减,称为衰减率.考古学上常用碳14推断死亡生物所处的年代，一般用放射性物质质量衰减一半所用的时间称为一个半衰期，碳14的半衰期是5730年.假设某生物死亡时其体内碳14的含量为 M_0，则此生物的死亡时间 $t(t>0$，单位：年) 和死亡后体内碳14的剩余含量 M 的函数关系是 $M=$______.

14. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的右焦点为 F，过 F 且斜率为 k 的直线与 C 的右支交于 M，N 两点，弦 MN 的垂直平分线交 x 轴于点 P，则点 P 的横坐标的取值范围是______.

四、解答题：本题共5小题，共77分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别是 a，b，c，已知 $\sqrt{3}\sin A+\cos(A+B)=\cos(A-B)$，$B$ 为锐角.

(1) 求角 B 的大小；

(2) 若 $b=2\sqrt{7}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

16. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 且斜率为 1 的直线 l 交 C 于 P,Q 两点.

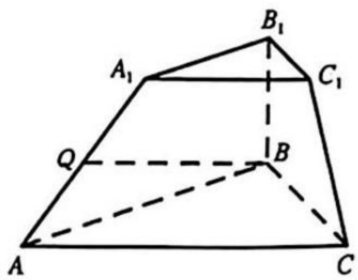
(1) 求线段 PQ 的长度；

(2) 已知 O 为坐标原点，若过 $E(2,0)$ 的直线 l_1 与 C 相交于 A，B 两点，求直线 OA，OB 的斜率之积.

17. 如图，在正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=2A_1B_1=2$，$AA_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 V；

(2) 若 Q 是 AA_1 的中点，求直线 QB 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.



18. 已知函数 $f(x)=(2x-1)\mathrm{e}^{x}-m(x-1)$, $m\in R$.

(1) 当 $m=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的图象在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 若 $f(x)$ 有 2 个极值点，求 m 的取值范围；

(3) 若 $f(x)$ 有 2 个零点，求 m 的取值范围.

19. 某学校举办一项竞赛活动,首先每个班级选出 8 位候选人,然后在这 8 人中随机选出 3 人组成竞赛小组参加预赛，预赛通过后再进入决赛.

(1) 已知某班甲、乙、丙三人已经入围 8 位候选人之中，现从这 8 人中抽签随机选出 3 人组成竞赛小组去参加预赛，记甲、乙、丙 3 人中进入竞赛小组的人数为 X，求 X 的分布列与数学期望；

(2) 预赛规则如下: 竞赛小组每人相互独立同时做同一题，至少有两人做对该题方能进入决赛.若甲、乙、丙 3 人组成了竞赛小组，且甲、乙、丙能独立做对该题的概率分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$,求此竞赛小组能进入决赛的概率;

(3) 假如只有 A 组与 B 组进入决赛，胜者获得冠军.已知决赛规则如下: 题库共有 $2n+1$ 道题，两个小组同时做同一道题, 假设每道题都能做出, 且没有相同时间做出, 先做对该题的小组得 1 分, 另一组不得分. A 组每道题先做对的概率都为 $p(0.5<p<1)$, B 组先做对的概率都为 q , 且 $p+q=1$,各题做题结果相互独立.现在有两种赛制可以供 A 组选择, 赛制一: 从题库中选出 $2n-1$ 道题, 这 $2n-1$ 道题全部做完后, 得分高的小组获得冠军; 赛制二: 做完 $2n+1$ 道题, 得分高的小组获得冠军.你认为 A 组应该选择哪种赛制更有利于胜出? 请说明理由并写出推导过程.

参考答案

1. C

【解析】因为 $A=\{x\mid x^2+x<0\}=\{x\mid -1<x<0\}$，所以 $A\cup B=\{x\mid x>-1\}$.

2. D

【解析】因为 $z=\dfrac{3+7i}{i}=\dfrac{(3+7\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{i\cdot(-\mathrm{i})}=-7\mathrm{i}^2-3\mathrm{i}=7-3\mathrm{i}$，所以在复平面内 z 对应的点的坐标为 $(7,-3)$，位于第四象限.

3. B

【解析】$a+kb=(1,2)+(0,3k)=(1,2+3k)$，由 $a\perp(a+kb)$，得 $1\times1+2\times(2+3k)=0$，$k=-\dfrac{5}{6}$.

4. A

【解析】由题意知圆 $C:(x-1)^2+(y+1)^2=3$ 的圆心为 $(1,-1)$，半径为 $r=\sqrt{3}$，因为圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|1+1-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}<r$，所以直线 l 和圆 C 相交.

5. D

【解析】去掉了最高分和最低分，平均数不一定相同，极差与标准差一定不同，不妨设 $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6<x_7$，原始数据的中位数为 x_4，且 x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 的中位数为 x_4.

6. B

【解析】由题意，得 $2\times1-1=1^2$，$2\times5-1=3^2$，$2\times13-1=5^2$，$\cdots$，$2\times181-1=19^2$，所以 $a_{10}=19^2=361$.

7. A

【解析】$f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，由 $\dfrac{1}{2}<T<1$，得 $2\pi<\omega<4\pi$，因为 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$ 对称，所以 $\dfrac{1}{4}\omega+\dfrac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in Z$，解得 $\omega=(4k-1)\pi$，$k\in Z$，又 $2\pi<\omega<4\pi$，所以 $\omega=3\pi$，$f(2026)=\sqrt{2}\sin\left(2026\times3\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}=1$.

8. C

【解析】$f(x)=\log_2(4^x+1)-\log_2 2^x=\log_2(2^x+2^{-x})$，因为 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，令 $g(x)=2^x+2^{-x}$，$g'(x)=(2^x-2^{-x})\ln2$，当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，由复合函数的单调性知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，由 $f(x)$ 是偶函数，得 $f(|x|)=f(x)$，再由对数换底公式和运算性质，得 $a=f(\log_2 3)$，$b=f(-\log_3 4)=f(\log_3 4)$，$c=f\left(\tan\left(2\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=f(-1)=f(1)$，$\dfrac{\log_3 4}{\log_2 3}=\log_3 4\cdot\log_3 2<\left(\dfrac{\log_3 4+\log_3 2}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\log_3 8}{2}\right)^2<\left(\dfrac{\log_3 9}{2}\right)^2=1$，所以 $\log_3 4<\log_2 3$，所以 $1<\log_3 4<\log_2 3$，又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $c<b<a$.

9. AC

【解析】对于 A，根据线面垂直的性质定理知 A 正确；对于 B，除非加上 $a\parallel b$，可以推出 $\alpha\parallel\beta$，其他情况容易举反例，故 B 错误；因为 $a\parallel\alpha$，过 a 作平面 $\gamma\cap\alpha=b$，$a\parallel b$，因为 $a\perp\beta$，所以 $b\perp\beta$，$b\subset\alpha$，所以 $\alpha\perp\beta$，故 C 正确；对于 D，直线 a，b 相交时符合面面平行判定定理，否则结论不成立，故 D 错误.

10. AC

【解析】因为 $f(x)=(x-1)^2(x+2)$，所以 $f'(x)=3(x+1)(x-1)$，所以 $f'(0)=-3$，故 A 正确；由 A 知 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=0$，故 B 错误；因为 $f'(x)=3(x+1)(x-1)$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\sqrt{x}+2$

$\geqslant 2$，所以 $f(\sqrt{x}+2)\geqslant f(2)=4$，故 C 正确；当 $x\in(0,1)$ 时，由幂函数的性质，知 $\sqrt{x}>x^2$，因为 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，所以 $f(\sqrt{x})<f(x^2)$，故 D 错误.

11. ACD

【解析】$a_1+a_2+\cdots+a_n=(a_1+a_2)+a_2+\cdots+a_n-1=(a_3+a_2)+a_3+\cdots+a_n-1=\cdots=a_{n+1}+a_n-1=a_{n+2}-1$，故 A 正确；因为 $a_3^2-a_1^2=4-1=3\neq a_5$，故 B 错误；$2a_3=a_1+a_2+a_3$，$2a_6=a_4+a_5+a_6$，$\cdots$，$2a_{3n}=a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}$，以上各式相加，得 $a_3+a_6+\cdots+a_{3n}=\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_{3n})=\frac{1}{2}(a_{3n+2}-1)$，故 C 正确；$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=a_1a_2+a_2^2+\cdots+a_n^2$

$=(a_1+a_2)a_2+a_3^2+\cdots+a_n^2=a_2a_3+a_3^2+\cdots+a_n^2=\cdots=(a_{n-1}+a_n)a_n=a_na_{n+1}$，故 D 正确.

12. 14

【解析】由基本不等式，得 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=2\sqrt{49}=14$，当且仅当 $x=y=7$ 时，等号成立，所以 $x+y$ 的最小值为 14.

13. $M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}(t\geqslant 0)$

【解析】设死亡生物体内碳 14 含量的年衰减率为 p，那么死亡 1 年后生物体内碳 14 含量为 $M_0(1-p)$，死亡 2 年后生物体内碳 14 含量为 $M_0(1-p)^2$，死亡 5730 年后生物体内碳 14 含量为 $M_0(1-p)^{5730}$，所以 $M_0(1-p)^{5730}=\frac{1}{2}M_0$，$p=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$，所以 $M=M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}(t\geqslant 0)$.

14. $\left(\frac{27}{4},+\infty\right)$

【解析】设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，弦 MN 的中点为 $Q(x_0,y_0)$，由题意，得 $c=\sqrt{4+5}=3$，则 $F(3,0)$，设 $MN:y=k(x-3)(k\neq 0)$，联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1,\\ y=k(x-3),\end{cases}$ 得 $(4k^2-5)x^2-24k^2x+20+36k^2=0$，所以 $\Delta=400k^2+400>0$，$x_1+x_2=\frac{24k^2}{4k^2-5}$，$x_1x_2=\frac{20+36k^2}{4k^2-5}$，因为直线 MN 和 C 的右支交于两点，所以 $x_1x_2>0$，解得 $k^2>\frac{5}{4}$，因为 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{12k^2}{4k^2-5}$，$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{k(x_1+x_2-6)}{2}=\frac{15k}{4k^2-5}$，直线 PQ 的方程为 $y-\frac{15k}{4k^2-5}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{12k^2}{4k^2-5}\right)$，令 $y=0$，得 $x_P=\frac{27k^2}{4k^2-5}=\frac{27}{4-\frac{5}{k^2}}$，又 $k^2>\frac{5}{4}$，所以 $0<4-\frac{5}{k^2}\langle 4,x_P\rangle\frac{27}{4}$，即点 P 的横坐标的取值范围是 $\left(\frac{27}{4},+\infty\right)$.

15. (1) 因为 $\sqrt{3}\sin A+\cos(A+B)=\cos(A-B)$，所以 $\sqrt{3}\sin A+\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos A\cos B+\sin A\sin B$，即 $\sqrt{3}\sin A=2\sin A\sin B$. 因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A\neq 0$，$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又已知 $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$，解得 $ac=12$，

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得 $28=a^2+c^2-12$，所以 $a^2+c^2=40$，

所以 $a+c=\sqrt{a^2+c^2+2ac}=\sqrt{40+2\times 12}=8$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=8+2\sqrt{7}$.

16. (1) 由题意，得 $F(1,0)$，所以 l 的方程为 $y=x-1$，

设 $P(x_P,y_P)$，$Q(x_Q,y_Q)$，由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=x-1,\end{cases}$ 得 $x^2-6x+1=0$，所以 $\Delta=32>0$，$x_P+x_Q=6$，

由抛物线的定义，得 $|PQ|=x_P+x_Q+2=8$.

(2) 由题意知 l_1 的斜率不为 0，可设 $l_1:x=my+2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 OA，OB 的斜率分别为 k_1，k_2，

联立方程, 得 $\begin{cases}x=my+2,\\y^2=4x,\end{cases}$ 所以 $y^2-4my-8=0$, $\Delta=(-4m)^2-4\times(-8)=16m^2+32>0$,

所以 $y_1+y_2=4m$, $y_1y_2=-8$,

因为 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 在 C 上, 所以 $y_1^2=4x_1$, $y_2^2=4x_2$, $k_1=\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{4}{y_1}$, $k_2=\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{4}{y_2}$,

所以 $k_1k_2=\dfrac{16}{y_1y_2}=\dfrac{16}{-8}=-2$, 即直线 OA , OB 的斜率之积为 -2.

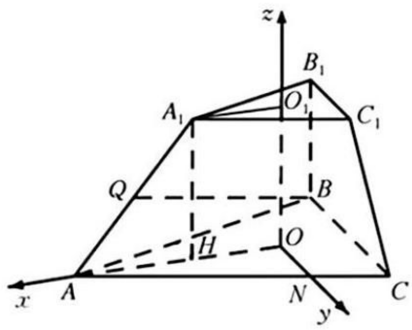
17. (1) 如图，设上、下底面的中心分别为 O_1，O，连接 A_1O_1，AO，过 A_1 点作底面 ABC 的垂线，垂足为 H，则 H 在 AO 上，A_1H 是三棱台的高，

因为 $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ 都是正三角形, 且 $AB=2A_1B_1=2$, 所以 $AO=2A_1O_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $AH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

由勾股定理, 得 $A_1H=\sqrt{A_1A^2-AH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1$,

所以正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times1\times\left[\dfrac{\sqrt{3}}{4}(2^2+1^2+2\times1)\right]=\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$.

(2) 如图，以 O 为原点，OA 为 x 轴正方向，过 O 作 BC 的平行线与 AC 交于点 N，ON 为 y 轴正方向，OO_1 为 z 轴正方向，



则 $A\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0,0\right)$, $A_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},0,1\right)$,

所以 $Q\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$, $B\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-1,0\right)$, $B_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6},-\dfrac{1}{2},1\right)$,

$C\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},1,0\right)$,

所以 $\overrightarrow{BQ}=\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{6},1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$, $\overrightarrow{BB_1}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6},\dfrac{1}{2},1\right)$.

设平面 BCC_1B_1 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$, 则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}2y=0,\\\dfrac{\sqrt{3}}{6}x+\dfrac{1}{2}y+z=0,\end{cases}$

取 $x=2\sqrt{3}$, 得 $n=(2\sqrt{3},0,-1)$, 即平面 BCC_1B_1 的一个法向量为 $n=(2\sqrt{3},0,-1)$.

设直线 QB 与平面 BCC_1B_1 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{BQ},\vec{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{BQ}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BQ}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{6},1,\dfrac{1}{2}\right)\cdot(2\sqrt{3},0,-1)\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2+1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\times\sqrt{(2\sqrt{3})^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{9\sqrt{390}}{260}$,

即直线 QB 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{9\sqrt{390}}{260}$.

18. (1) 当 $m=1$ 时, $f(x)=(2x-1)e^x-(x-1)$, $f(1)=e$, $f'(x)=(2x+1)e^x-1$, 所以 $f'(1)=3e-1$.

所以 $f(x)$ 的图象在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-e=(3e-1)(x-1)$, 即 $(3e-1)x-y-2e+1=0$.

(2) 因为函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，所以函数 $f'(x)$ 有 2 个变号零点，

而 $f'(x)=(2x+1)e^x-m$, 令 $f'(x)=0$, 所以 $m=(2x+1)e^x$,

设 $g(x)=(2x+1)e^x$, 只需 $y=m$ 与 $g(x)=(2x+1)e^x$ 的图象有 2 个交点, $g'(x)=(2x+3)e^x$,

当 $x>-\dfrac{3}{2}$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增; 当 $x<-\dfrac{3}{2}$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)$ 上单调递减，所以 $[g(x)]_{\min}=g\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-2e^{-\frac{3}{2}}$, $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$.

又 $x\to-\infty$ 时，$g(x)<0$ 且 $g(x)\to 0$，

所以当 $m\in\left(-2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}},0\right)$ 时，函数 $y=f(x)$ 有 2 个极值点.

(3) $f(1)=\mathrm{e}$，1 不是 $f(x)$ 的零点，令 $f(x)=0$，则 $(2x-1)\mathrm{e}^x-m(x-1)=0$，

所以 $m=\dfrac{(2x-1)\mathrm{e}^x}{x-1}$，令 $h(x)=\dfrac{(2x-1)\mathrm{e}^x}{x-1}$，欲使函数 $f(x)$ 有 2 个零点，只须直线 $y=m$ 与 $y=h(x)$ 的图象有 2 个交点，$h'(x)=\dfrac{(2x+1)\mathrm{e}^x(x-1)-(2x-1)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}=\dfrac{x(2x-3)}{(x-1)^2}\mathrm{e}^x$，

当 $x<0$ 或 $x>\dfrac{3}{2}$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $0<x<1$ 或 $1<x<\dfrac{3}{2}$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 上单调递减，且 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，

$h(x)$ 的极大值为 $h(0)=1$，$h(x)$ 的极小值为 $h\left(\dfrac{3}{2}\right)=4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$，

又当 $x\to-\infty$ 时，$h(x)>0$ 且 $h(x)\to 0$，当 $x<1$ 且 $x\to 1$ 时，$h(x)\to-\infty$，当 $x>1$ 且 $x\to 1$ 时，$h(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$，所以当 $0<m<1$ 或 $m>4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ 时，直线 $y=m$ 与 $y=h(x)$ 的图象有 2 个交点，

即 $f(x)$ 有 2 个零点时，m 的取值范围是 $(0,1)\cup\left(4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$.

19. (1) 由题意知随机变量 X 的取值可以为 0，1，2，3，

$P(X=0)=\dfrac{C_3^2C_5^3}{C_8^3}=\dfrac{10}{56}=\dfrac{5}{28}$，$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\dfrac{30}{56}=\dfrac{15}{28}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\dfrac{15}{56}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^2C_5^0}{C_8^3}=\dfrac{1}{56}$. 所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{5}{28}$	15	$\dfrac{15}{56}$	$\dfrac{1}{56}$

X 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{5}{28}+1\times\dfrac{15}{28}+2\times\dfrac{15}{56}+3\times\dfrac{1}{56}=\dfrac{63}{56}=\dfrac{9}{8}$.

(2) 设甲、乙、丙能独立做对该题的事件分别为 A、B、C，则至少有两人做对该题的事件为：$AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC$，所以竞赛小组能进入决赛的概率为 $P\left(AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC\right)=P\left(AB\bar{C}\right)+P\left(A\bar{B}C\right)+P\left(\bar{A}BC\right)+P(ABC)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{3}{4}+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{17}{24}$.

(3) 按照赛制一，设做完选定的 $2n-1$ 题后，A 组的得分为 Y，则 $Y\sim B(2n-1,p)$，A 组取得胜利的概率为 $p_1=P(Y\geqslant n)=P(Y=n)+P(Y\geqslant n+1)$；

按照赛制二，可以认为在赛制一的基础上再把剩下的两道题做完，不妨设做完 $2n+1$ 题，A 组取得胜利的概率为 p_2，

则 $p_2=P(Y=n-1)\cdot p^2+P(Y=n)[1-(1-p)^2]+P(Y\geqslant n+1)$，

$$
\begin{aligned}
p_2-p_1&=P(Y=n-1)\cdot p^2-P(Y=n)(1-p)^2\\
&=C_{2n-1}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^n p^2-C_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^{n-1}(1-p)^2\\
&=C_{2n-1}^{1}p^{n+1}(1-p)^n-C_{2n-1}^{1}p^n(1-p)^{n+1}\\
&=C_{2n-1}p^n(1-p)^n[p-(1-p)]\\
&=2C_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^n\left(p-\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}
$$

已知 $p>0.5$，所以 $p_2>p_1$，因此 A 组采用赛制二更有利于胜出.