陕西省西安市铁一中学2025－2026学年高三上学期月考5

数学试题

★祝大家学习生活愉快★

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分，每小题只有一个选项符合要求

1. 已知集合$A=\left\{x\left|\frac{x+1}{x-2}\leqslant 0\right.\right\}$，$B=\{x\mid x^2+2x-3\leqslant 0\}$，则$A\cap B=$

A. $\{x\mid -3\leqslant x<-1\}$　B. $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$　C. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$　D. $\{x\mid -3\leqslant x<2\}$

2. 已知命题$p:\exists x\in[0,+\infty)$，$x^3-x-2>0$，则$\neg p$是

A. $\forall x\in[0,+\infty)$，$x^3-x-2>0$　B. $\forall x\in[0,+\infty)$，$x^3-x-2\leqslant 0$

C. $\exists x\in(-\infty,0]$，$x^3-x-2>0$　D. $\exists x\in(-\infty,0]$，$x^3-x-2\leqslant 0$

3. 已知x，y为实数，设$p:|x|<y$，$q:2^x<2^y$，则p是q的

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

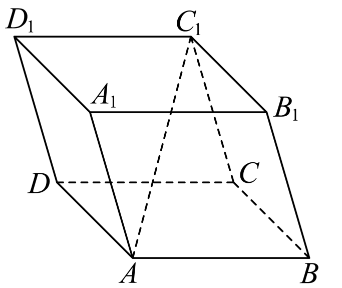
4. 在$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$的展开式中，常数项为

A. 15　B. 16　C. 180　D. 240

5. 已知直线$x+y+a=0$与圆$O:x^2+y^2=4$相交于A，B两点，若$\triangle OAB$为正三角形，则实数a的值是

A. $\sqrt{6}$　B. $-\sqrt{6}$　C. $-\sqrt{3}$或$\sqrt{3}$　D. $-\sqrt{6}$或$\sqrt{6}$

6. 如图所示，平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AD=AA_1=\sqrt{2}$，$\angle DAA_1=60^\circ$，$\angle BAD=\angle BAA_1=120^\circ$，则线段$AC_1$的长度为



A. $\sqrt{2}$　B. $\sqrt{3}$　C. 2　D. $\sqrt{5}$

7. 已知$f(x)$是R上的奇函数，当$x\geqslant 0$时，$f(x)=2^x+4x-1$，则不等式$f(x+1)+5<0$的解集是

A. $(-\infty,-2)$　B. $(-\infty,-3)$　C. $(3,+\infty)$　D. $(2,+\infty)$

8. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且 $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n$，则 $\dfrac{2S_n+12}{a_n}$ 的最小值为

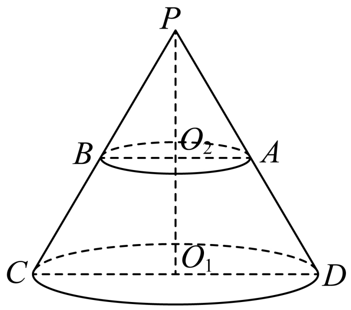
A. 7　　B. 8　　C. 14　　D. $4\sqrt{3}+1$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则

A. $\sin(\pi-\alpha)=\dfrac{4}{5}$　　B. $\tan(\pi+\alpha)=-\dfrac{3}{4}$　　C. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\dfrac{3}{5}$　　D. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\dfrac{3}{5}$

10. 如图所示，圆锥 PO_1 的轴截面 PCD 是面积为 $4\sqrt{3}$ 的正三角形，用平行于圆锥 PO_1 底面的平面截该圆锥，截面圆 O_2 与 PC，PD 分别交于点 B，A，且 $AB=2$，则



A. 圆锥 PO_1 的表面积为 12π

B. 圆台 O_1O_2 的高为 $\sqrt{3}$

C. 圆锥 PO_2 的体积为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

D. 从点 C 出发沿着该圆锥侧面到达 AD 中点的最短路程为 5

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{|\ln x|}},x\in(0,+\infty)\\ \ln(1-x),x\in(-\infty,0]\end{cases}$，则下列说法正确的有

A. 函数 $f(x)$ 的最小值为 0

B. 若关于 x 的方程 $f(x)=t$ 恰有 1 个解，则 $t>1$

C. 函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x+y+c=0(c\in R)$ 有且仅有一个交点

D. 若 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，且 $x_1<x_2<x_3$，则 $(1-x_1)(x_2+x_3)$ 无最值

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分

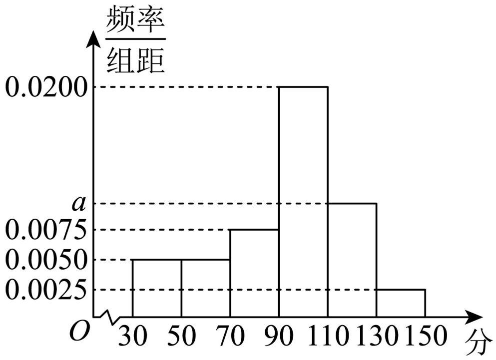
12. 已知复数 $z=1-\mathrm{i}$，则 $(1+z)(1-z)=$ ______.

13. 已知函数 $y=\log_a(x-2)-1$ 的图象过定点 (s,t)，正实数 m，n，满足 $ms-nt=1$，则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{3}{n}$ 的最小值为 ______.

14. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$AA_1=3$，P 为矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 内一动点，设二面角 $P-AD-C$ 为 α，直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角为 β，若 $\alpha=\beta$，则三棱锥 $P-A_1BC_1$ 体积的最小值是 ______.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

15. 我校对 2021 年高一上学期期中数学考试成绩 (单位：分) 进行分析，随机抽取 100 名学生，将分数按照 $[30,50)$，$[50,70)$，$[70,90)$，$[90,110)$，$[110,130)$，$[130,150]$ 分成 6 组，制成了如图所示的频率分布直方图：



(1) 估计我校高一期中数学考试成绩的众数、平均分；

(2) 为了进一步了解学生对数学学习的情况，由频率分布直方图，成绩在 $[50,70)$ 和 $[70,90)$ 的两组中，用按比例分配的分层随机抽样的方法抽取 5 名学生，再从这 5 名学生中随机抽取 2 名学生进行问卷调查，求抽取的这 2 名学生至少有 1 人成绩在 $[50,70)$ 内的概率.

16. 已知函数 $f(x)=\dfrac{3}{2}-2\sin^2x$，$x\in(0,\pi)$.

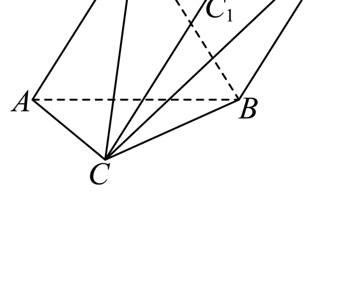
(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间；

(2) 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，角 A 所对边 $a=\sqrt{19}$，角 B 所对边 $b=5$，若 $f(A)=0$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 A_1ABB_1 为菱形，平面 $A_1ABB_1\perp$ 平面 ABC，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC=A_1B$.

(1) 证明：$A_1B\perp B_1C$；

(2) 点 B_1 到平面 A_1ACC_1 的距离为 $\sqrt{3}$，求直线 AA_1 与平面 A_1B_1C 所成角的正弦值.



18. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\ln(1+x)$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2) 设 $g(x)=f'(x)$，讨论函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性；

(3) 证明：对任意的 $s,t\in(0,+\infty)$，有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$.

19. 已知椭圆 Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距和短轴长相等，且长轴长与焦距之差为 $2\sqrt{2}-2$.

(1) 求椭圆 Γ 的方程；

(2) 按下面方法进行操作：过点 $A_n(a_n,0)(0<a_n\leqslant 1,n\in N^*)$ 作两条互相垂直且不与坐标轴重合的直线 l_n 与 l_n'，直线 l_n 交椭圆 Γ 于 C_n，D_n 两点，直线 l_n' 交椭圆 Γ 于 E_n，F_n 两点，令弦 C_nD_n 与 E_nF_n 的中点分别为 P_n 与 Q_n，直线 P_nQ_n 与 x 轴交于点 $A_{n+1}(a_{n+1},0)$，其中 $a_1=1$，$l_1,l_2,\cdots l_n$ 相互平行，直线 $l_1',l_2',\cdots l_n'$ 相互平行.

(i) 证明：$\{a_n\}$ 为等比数列；

(ii) 记 $\triangle A_nP_nQ_n$ 的面积 S_n，数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，若对于 $\forall n\in N^*$，均有 $T_n<\lambda$，求实数 λ 的最小值.

参考答案

1. C

【解析】因为 $A=\left\{x\left|\frac{x+1}{x-2}\leqslant 0\right.\right\}=\left\{x\left|\begin{cases}(x+1)(x-2)\leqslant 0\\ x-2\neq 0\end{cases}\right.\right\}=\{x|-1\leqslant x<2\}$，

$B=\{x\mid x^2+2x-3\leqslant 0\}=\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}$，

所以 $A\cap B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$.

2. B

【解析】由于命题 $p:\exists x\in[0,+\infty)$，$x^3-x-2>0$ 是存在量词命题，所以，改量词、否定结论后，可得 $\neg p$ 是全称量词命题 $\forall x\in[0,+\infty)$，$x^3-x-2\leqslant 0$.

3. A

【解析】由 $|x|<y\Rightarrow x<y\Rightarrow 2^x<2^y$，可知 $p\Rightarrow q$，由 $2^x<2^y\Rightarrow x<y$，推不出 $|x|<y$，如 $x=-1$，$y=0$，可知 q 推不出 p，综上，可知 p 是 q 的充分不必要条件.

4. D

【解析】对于 $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$，其展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(x^2)^{6-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r=C_6^r(-2)^r x^{12-3r}$.

令 $12-3r=0$，解得 $r=4$. 将 $r=4$ 代入通项，常数项为 $C_6^4(-2)^4=15\times 16=240$.

5. D

【解析】由圆 $O:x^2+y^2=4$ 可得圆心 $O(0,0)$，半径 $r=2$，$\because\triangle OAB$ 为正三角形，边长为 r，

$\therefore$ 圆心 $O(0,0)$ 到直线 $x+y+a=0$ 的距离为 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}r=\sqrt{3}$，即 $d=\frac{|a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，解得 $a=\pm\sqrt{6}$.

6. C

【解析】根据题意，取向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 为基底，

则 $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$，

所以 $\left|\overrightarrow{AC_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+\left|\overrightarrow{AA_1}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=2+2+2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\cos 120^\circ+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\cos 120^\circ+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\cos 60^\circ$

$=2+2+2-2-2+2=4$，所以 $\left|\overrightarrow{AC_1}\right|=2$

所以线段 AC_1 的长度为为 2.

7. A

【解析】由于 $y=2^x$，$y=4x-1$ 均为 $[0,+\infty)$ 上的单调递增函数，故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

由于 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，故 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

又 $f(1)=5$，故 $f(-1)=-5$，

由 $f(x+1)+5<0$ 得 $f(x+1)<-5$，等价于 $f(x+1)<f(-1)$，

所以 $x+1<-1$，解得 $x<-2$.

8. B

【解析】由 $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$ 可得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$，故 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为常数列，因此有 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=1$，

得 $a_n=n$，故 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，

则 $\frac{2S_n+12}{a_n}=\frac{n(n+1)+12}{n}=n+\frac{12}{n}+1$，$n\in N^*$.

设 $f(x)=x+\frac{12}{x}$，$x>0$，$x=\frac{12}{x}$，解得 $x=2\sqrt{3}$，由对勾函数的单调性，

易知 $f(x)=x+\dfrac{12}{x}$ 在 $(0,2\sqrt{3})$ 上单调递减，在 $(2\sqrt{3},+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(n)=n+\dfrac{12}{n}$ 可能在 $n=3$ 或 $n=4$ 处取得最小值.

而 $f(3)=3+\dfrac{12}{3}=7$，$f(4)=4+\dfrac{12}{4}=7$，

得 $f(n)=n+\dfrac{12}{n}$ 的最小值为7，则 $n+\dfrac{12}{n}+1$ 的最小值为8.

9. AC

【解析】因为 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，则 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{3}$.

则 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$，

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$.

10. ABD

【解析】对于 A，设 $\triangle PCD$ 的边长为 a，由已知得 $\dfrac{1}{2}a\cdot a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$，解得 $a=4$，

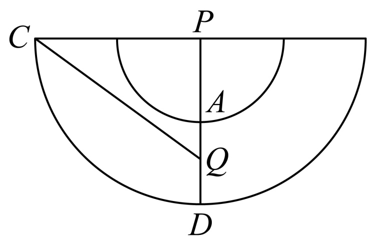
所以圆锥 PO_1 的表面积为 $S=\pi\times2\times4+\pi\times2^2=12\pi$，故 A 正确；

对于 B，因为 $CD=4$，所以 $PO_1=2\sqrt{3}$，又 $AB=\dfrac{1}{2}CD$，

所以 $O_1O_2=\dfrac{1}{2}PO_1=\sqrt{3}$，故 B 正确；

对于 C，圆锥 PO_2 的体积为 $V=\dfrac{1}{3}\pi\times1^2\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$，故 C 错误；

对于 D，由已知得圆锥 PO_1 的侧面展开图的圆心角 $\theta=\dfrac{2\pi\times2}{4}=\pi$，设 AD 的中点为 Q，连接 CQ，如图，



可得 $\angle CPQ=\dfrac{\pi}{2}$，$PC=4$，$PQ=2+1=3$，则 $CQ=\sqrt{4^2+3^2}=5$，故 D 正确.

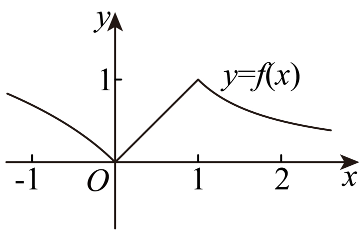
11. AC

【解析】当 $x\geqslant1$ 时，$\ln x\geqslant0$，则 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\ln x}}=\dfrac{1}{x}$，在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

当 $0<x<1$ 时，$\ln x<0$，则 $f(x)=\dfrac{1}{e^{-\ln x}}=x$，在 $(0,1)$ 上单调递增，

当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)=\ln(1-x)$，根据复合函数单调性可知，

$f(x)=\ln(1-x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，作出 $f(x)$ 图象，如下图所示：



选项 A：由图象可得，当 $x=0$ 时，$f(x)$ 有最小值，且 为 0，故 A 正确；

选项B:若关于x的方程$f(x)=t$恰有1个解,则$y=f(x)$与$y=t$图象只有一个交点,
由图象可得$t>1$,或$t=0$,故B错误;
选项C:直线$x+y+c=0(c\in R)$,变形为$y=-x-c$,斜率为-1,
当$x\leqslant 0$时,$f(x)=\ln(1-x)$,则$f'(x)=\dfrac{1}{1-x}\cdot(-1)=\dfrac{1}{x-1}$,
设切点横坐标为x_0,令$f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0-1}=-1$,解得$x_0=0$,即在$(0,0)$切线的斜率为$-1$,
所以当$-c\leqslant 0$,即$c\geqslant 0$时,$f(x)$与$y=-x-c$只有一个交点;
当$0<x<1$时,$f(x)=x$,与$y=-x-c$,只有一个交点,
此时$0<-c<2$,即$-2<c<0$;
当$x\geqslant 1$时,$f(x)=\dfrac{1}{x}$,即当$-c\geqslant 2$,$c\leqslant -2$时,
令$\dfrac{1}{x}=-x-c$,得$x^2+cx+1=0$,
令$p(x)=x^2+cx+1(x>1)$,对称轴为$x=\dfrac{-c}{2}\geqslant 1$,且$p(1)=2+c\leqslant 0$,$p(-c)=1>0$,
根据二次函数性质及零点存在定理可得,方程$x^2+cx+1=0$在$[1,+\infty)$上只有一个实根,
综上,函数$f(x)$的图象与直线$x+y+c=0(c\in R)$有且仅有一个交点,故C正确;
选项D:设$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=t$,由图象得$t\in(0,1)$,
则$\ln(1-x_1)=t$,解得$1-x_1=e^t$,$x_2=t$,$\dfrac{1}{x_3}=t$,解得$x_3=\dfrac{1}{t}$,
所以$(1-x_1)(x_2+x_3)=e^t\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$,
令$h(t)=e^t\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$,$t\in(0,1)$,则$h'(t)=e^t\left(t+\dfrac{1}{t}\right)+e^t\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)=\dfrac{e^t(t^3+t^2+t-1)}{t^2}$,
设$m(t)=t^3+t^2+t-1$,$t\in(0,1)$,则$m'(t)=3t^2+2t+1=3\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}>0$恒成立,
所以$m(t)$在$(0,1)$上单调递增,
又$m\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{14}{27}\langle 0,m\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{11}{27}\rangle 0$,
所以存在$t_0\in\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$,使$m(t_0)=0$,
当$t\in(0,t_0)$时,$m(t)<0$,即$h'(t)<0$,则$h(t)$单调递减;
当$t\in(t_0,1)$时,$m(t)>0$,即$h'(t)>0$,则$h(t)$单调递增,
所以$h(t)$存在最小值$h(t_0)$,故D错误.

12. $1+2i$

【解析】$(1+z)(1-z)=(1+1-i)i=1+2i$.

13. 12

【解析】当$x-2=1$时,$y=-1$,所以函数$y=\log_a(x-2)-1$的图象过定点$(3,-1)$,
所以$s=3$,$t=-1$,即$3m+n=1$,所以$\dfrac{1}{m}+\dfrac{3}{n}=(3m+n)\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{3}{n}\right)=6+\dfrac{n}{m}+\dfrac{9m}{n}\geqslant 6+2\sqrt{\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{9m}{n}}$
$=12$,
当且仅当$m=\dfrac{1}{6}$,$n=\dfrac{1}{2}$时等号成立.

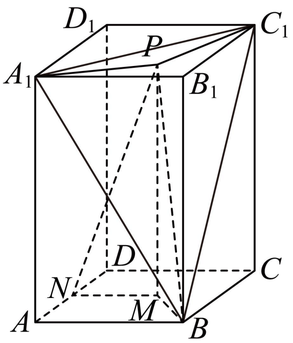
14. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】如图,作$PM\perp$平面$ABCD$,垂足为M,再作$MN\perp AD$,垂足为N,
连接PN,PB,PM,因为$AD\subset$平面$ABCD$,故$AD\perp PM$,

而 $NM \cap PM = M$, NM, $PM \subset$ 平面 PMN，故 $AD \perp$ 平面 PMN，

而 $PN \subset$ 平面 PMN，故 $AD \perp PN$，故 $\angle PNM$ 为 $P-AD-C$ 的平面角，

则 $\alpha = \angle PNM$，$\beta = \angle PBM$，由 $\alpha = \beta$，则 $\angle PNM = \angle PBM$，



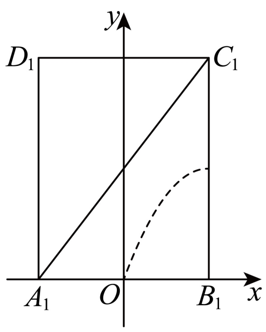
又 MN、$MB \subset$ 平面 $ABCD$，故 $PM \perp MN$，$PM \perp MB$，则 $MN = MB$，

由抛物线定义可知，M 的轨迹为以 B 为焦点，以 AD 为准线的抛物线一部分，

所以 P 的轨迹为以 B_1 为焦点，以 A_1D_1 为准线的抛物线一部分，

当点 P 到线段 B_1D_1 距离最短时，三角形 PB_1D_1 面积最小，即三棱锥 $P-BB_1D_1$ 体积最小，

取 C_1D_1 中点 O_1 为原点，建立如图所示平面直角坐标系，



则 $C_1(1, 2\sqrt{2})$，$D_1(-1, 2\sqrt{2})$，$B_1(1, 0)$，$A_1(-1, 0)$

则直线 A_1C_1 的方程为：$y = \sqrt{2}(x+1)$，即 $\sqrt{2}x - y + \sqrt{2} = 0$，

抛物线的方程为 $y^2 = 4x \Rightarrow y = 2\sqrt{x}\,(0 < y < 2)$，则 $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$，

由题意，令 $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}$，得 $x = \dfrac{1}{2}$，代入 $y = 2\sqrt{x}$，得 $y = \sqrt{2}$，所以点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$，

所以动点 P 到直线 B_1D_1 的最短距离为 $d = \dfrac{\left|\dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2}\right|}{\sqrt{1+2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

因 为 $A_1C_1 = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$，所以 $V_{P-A_1BC_1} = V_{B-PA_1C_1} = \dfrac{1}{3} \times 3 \times \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以三棱锥 $P-A_1BC_1$ 体积的最小值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

15. (1) 由 $0.005 \times 20 + 0.005 \times 20 + 0.0075 \times 20 + 0.02 \times 20 + a \times 20 + 0.0025 \times 20 = 1$，可得 $a = 0.01$.

即数学成绩在 $[30, 50)$ 的频率为 $0.0050 \times 20 = 0.1$，

在 $[50, 70)$ 的频率为 $0.0050 \times 20 = 0.1$，

在 $[70, 90)$ 的频率为 $0.0075 \times 20 = 0.15$，

在 $[90, 110)$ 的频率为 $0.0200 \times 20 = 0.4$，

在 $[110, 130)$ 的频率为 $0.0100 \times 20 = 0.2$，

在 $[130,150]$ 频率为 $0.0025\times20=0.05$.

数学成绩在 $[90,110)$ 内的最多，所以众数是 $\dfrac{90+100}{2}=100$，

平均分是 $40\times0.1+60\times0.1+80\times0.15+100\times0.4+120\times0.2+140\times0.05=93$.

(2) 由题意可知，数学成绩在 $[50,70)$ 内的人数为 $100\times0.1=10$(人)，在 $[70,90)$ 内的人数为 $100\times0.15=15$(人).

用按比例分配的分层随机抽样的方法抽取 5 名学生，

则需在 $[50,70)$ 内抽取 2 人，分别记为 m、n；$[70,90)$ 内抽取 3 人，分别记为 x、y、z，

记事件 A 为“抽取的这 2 名学生至少有 1 人成绩在 $[50,70)$ 内”，

则样本空间为 $\{mn,mx,my,mz,nx,ny,nz,xy,xz,yz\}$，共包含 10 个样本点，

而事件 $A=\{mn,mx,my,mz,nx,ny,nz\}$，包含 7 个样本点，

故 $P(A)=\dfrac{7}{10}$，即抽取的这 2 名学生至少有 1 人成绩在 $[50,70)$ 内的概率为 $\dfrac{7}{10}$.

16. (1) 因为 $f(x)=\dfrac{3}{2}-2\sin^2x=\dfrac{3}{2}-2\times\dfrac{1-\cos2x}{2}=\dfrac{1}{2}+\cos2x$，

又因为 $x\in(0,\pi)$，则 $2x\in(0,2\pi)$，

且 $y=\cos2x$ 在 $(0,2\pi)$ 内的单调递减区间为 $(0,\pi)$，

则 $0<2x<\pi$，解得 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(2) 因为 $f(A)=\dfrac{1}{2}+\cos2A=0$，即 $\cos2A=-\dfrac{1}{2}$，

且 $A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $2A\in(0,\pi)$，可得 $2A=\dfrac{2\pi}{3}$，即 $A=\dfrac{\pi}{3}$，

由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $19=25+c^2-2\times5c\times\dfrac{1}{2}$，

整理可得 $c^2-5c+6=0$，解得 $c=2$ 或 $c=3$，

显然边 b 为最大边，则 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{19+c^2-25}{2ac}=\dfrac{c^2-6}{2ac}>0$，解得 $c>\sqrt{6}$，

可得 $c=3$，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times5\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

17. (1) 取 AB 的中点 O，连接 A_1O，不妨设 $AB=AC=A_1B=2$，

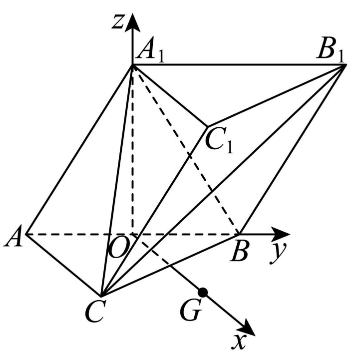
因为四边形 A_1ABB_1 为菱形，所以 $AA_1=AB=2$，

则 $AB=AA_1=A_1B=2$，得到三角形 A_1AB 是等边三角形，$A_1O\perp AB$，

$A_1O\subset$ 面 A_1ABB_1，因为平面 $A_1ABB_1\perp$ 平面 ABC，所以 $A_1O\perp$ 平面 ABC，

而 $\angle BAC=90^\circ$，可得 $AC\perp AB$，作 $OG\parallel AC$，

如图，以 O 为原点，建立空间直角坐标系，



设 $C(x,y,0)$，由题意得 $A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$B_1(0,2,\sqrt{3})$，

则 $\overrightarrow{AC}=(x,y+1,0)$，$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,1,-\sqrt{3})$，

因为 $AC\perp AB$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，可得 $2(y+1)=0$，解得 $y=-1$，

而 $AC=2$，得到 $\sqrt{x^2}=2$，化简得 $x^2=4$，

解得 $x=2$(负根舍去)，故 $C(2,-1,0)$，

而 $\overrightarrow{B_1C}=(2,-3,-\sqrt{3})$，得到 $\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{B_1C}=-3+3=0$，故 $A_1B\perp B_1C$.

(2) 设 $AB=AC=A_1B=a$，可得 $A\left(0,-\frac{a}{2},0\right)$，$B\left(0,\frac{a}{2},0\right)$，

$A_1\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，$B_1\left(0,a,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，同理可求 $C\left(a,-\frac{a}{2},0\right)$，

则 $\overrightarrow{AA_1}=\left(0,\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，$\overrightarrow{AC}=(a,0,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=\left(0,\frac{3}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，

设平面 A_1ACC_1 的法向量 $\vec{n}=(m,n,p)$，

可得 $\begin{cases}\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{n}=\frac{1}{2}an+\frac{\sqrt{3}}{2}ap=0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=ma=0\end{cases}$，令 $n=\sqrt{3}$，解得 $m=0$，$p=-1$，

得到 $\vec{n}=(0,\sqrt{3},-1)$，设点 B_1 到平面 A_1ACC_1 的距离为 d，

由点到平面的距离公式得 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，

因为点 B_1 到平面 A_1ACC_1 的距离为 $\sqrt{3}$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{3}$，解得 $a=2$，

此时 $\overrightarrow{AA_1}=(0,1,\sqrt{3})$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$B_1(0,2,\sqrt{3})$，$C(2,-1,0)$，

可得 $\overrightarrow{A_1B_1}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(2,-1,-\sqrt{3})$，

设面 A_1B_1C 的法向量为 $\vec{m}=(b,c,d)$，

可得 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\vec{m}=2c=0\\ \overrightarrow{A_1C}\cdot\vec{m}=2b-c-\sqrt{3}d=0\end{cases}$，令 $b=\sqrt{3}$，解得 $c=0$，$d=2$，

得到 $\vec{m}=(\sqrt{3},0,2)$，设直线 AA_1 与平面 A_1B_1C 所成角为 β，

可得 $\sin\beta=\dfrac{\left|\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\cdot\left|\vec{m}\right|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

18. (1) 因为 $f(x)=e^x\ln(1+x)$，所以 $f(0)=0$，

即切点坐标为 $(0,0)$，

又 $f'(x)=e^x\left(\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\right)$，

$\therefore$ 切线斜率 $k=f'(0)=1$

$\therefore$ 切线方程为：$y=x$

(2) 因为 $g(x)=f'(x)=e^x\left(\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\right)$，

所以 $g'(x)=e^x\left(\ln(1+x)+\frac{2}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\right)$，

令 $h(x)=\ln(1+x)+\frac{2}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}$，

则 $h'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{2}{(1+x)^2}+\frac{2}{(1+x)^3}=\frac{x^2+1}{(1+x)^3}>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore h(x)\geqslant h(0)=1>0$

$\therefore g'(x)>0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

(3) 原不等式等价于 $f(s+t)-f(s)>f(t)-f(0)$，

令 $m(x)=f(x+t)-f(x),(x,t>0)$，

即证 $m(x)>m(0)$，

$\because m(x)=f(x+t)-f(x)=e^{x+t}\ln(1+x+t)-e^{x}\ln(1+x)$，

$m'(x)=e^{x+t}\ln(1+x+t)+\dfrac{e^{x+t}}{1+x+t}-e^{x}\ln(1+x)-\dfrac{e^{x}}{1+x}=g(x+t)-g(x)$，

由 (2) 知 $g(x)=f'(x)=e^{x}\left(\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(x+t)>g(x)$，

$\therefore m'(x)>0$

$\therefore m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又因为 $x,t>0$，

$\therefore m(x)>m(0)$，所以命题得证.

19. (1) 设焦距为 $2c$，由题意得 $\begin{cases}2c=2b\\2a-2c=2\sqrt{2}-2\\c^2=a^2-b^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\b=1\\c=1\end{cases}$，所以椭圆 Γ 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)(ⅰ) 由题意，设直线 l_n 的斜率为 k，则 l_n' 的斜率为 $-\dfrac{1}{k}$，

因为直线 l_n 过点 $A_n(a_n,0)$，所以方程为 $y=k(x-a_n)$，

与椭圆联立 $\begin{cases}y=k(x-a_n)\\\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，整理得 $(1+2k^2)x^2-4a_nk^2x+2(k^2a_n-1)=0$，

设 $C_n(x_1,y_1)$，$D_n(x_2,y_2)$，则中点 P_n 的横坐标 $x_{P_n}=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2a_nk^2}{1+2k^2}$，

纵坐标 $y_{P_n}=k(x_{P_n}-a_n)=-\dfrac{a_nk}{1+2k^2}$，即 $P_n\left(\dfrac{2a_nk^2}{1+2k^2},-\dfrac{a_nk}{1+2k^2}\right)$，

同理直线 l_n' 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}(x-a_n)$，

与椭圆联立 $\begin{cases}y=-\dfrac{1}{k}(x-a_n)\\\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得 $(k^2+2)x^2-4a_nx+2(a_n^2-k^2)=0$，

设 $E_n(x_3,y_3)$，$F_n(x_4,y_4)$，则中点 Q_n 的横坐标 $x_{Q_n}=\dfrac{x_3+x_4}{2}=\dfrac{2a_n}{k^2+2}$，

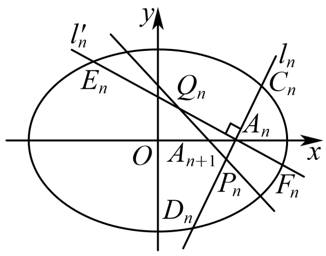
纵坐标 $y_{Q_n}=-\dfrac{1}{k}(x_{Q_n}-a_n)=\dfrac{a_nk}{k^2+2}$，即 $Q_n\left(\dfrac{2a_n}{k^2+2},\dfrac{a_nk}{k^2+2}\right)$，

则直线 P_nQ_n 的斜率 $m=\dfrac{y_{Q_n}-y_{P_n}}{x_{Q_n}-x_{P_n}}=\dfrac{\dfrac{a_nk}{k^2+2}+\dfrac{a_nk}{1+2k^2}}{\dfrac{2a_n}{k^2+2}-\dfrac{2a_nk^2}{1+2k^2}}=\dfrac{3k}{2(1-k^2)}$，

则直线 P_nQ_n 的方程为 $y-y_{P_n}=m(x-x_{P_n})$，

令 $y=0$，解得 $a_{n+1}=x_{P_n}-\dfrac{y_{P_n}}{m}=\dfrac{2a_nk^2}{1+2k^2}-\dfrac{-\dfrac{a_nk}{1+2k^2}}{\dfrac{3k}{2(1-k^2)}}=\dfrac{2a_n}{3}$，

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，$\frac{2}{3}$ 为公比　的　等比数列.



(ⅱ) $\triangle A_nP_nQ_n$ 的面积 S_n 可分为 $\triangle A_nP_nA_{n+1}$ 和 $\triangle A_nQ_nA_{n+1}$ 的面积之和 (A_{n+1} 在 x 轴上，P_n，Q_n 在 x 轴两侧)，

则 A_nA_{n+1} 的长度为 $a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{2a_n}{3}=\frac{a_n}{3}$，

又 $|y_{P_n}|=\frac{a_n|k|}{1+2k^2}$，$|y_{Q_n}|=\frac{a_n|k|}{k^2+2}$，

则 $S_n=\frac{1}{2}\times\frac{a_n}{3}\times\frac{a_n|k|}{1+2k^2}+\frac{1}{2}\times\frac{a_n}{3}\times\frac{a_n|k|}{k^2+2}=\frac{1}{2}a_n^2|k|\frac{k^2+1}{(1+2k^2)(k^2+2)}$，

令 $t=|k|>0$，

设 $f(t)=\frac{t(t^2+1)}{(1+2t^2)(t^2+2)}=\frac{t+\frac{1}{t}}{\left(\frac{1}{t}+2t\right)\left(t+\frac{2}{t}\right)}=\frac{t+\frac{1}{t}}{\left[\left(t+\frac{1}{t}\right)+t\right]\left[\left(t+\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t}\right]}=\frac{t+\frac{1}{t}}{2\left(t+\frac{1}{t}\right)^2+1}$，

令 $u=t+\frac{1}{t}\geqslant 2$，当且仅当 $t=1$ 时取等号，

所以 $y=\frac{u}{2u^2+1}=\frac{1}{2u+\frac{1}{u}}$，

因为 $f(u)=2u+\frac{1}{u}$ 在 $[2,+\infty)$ 单调递增，所以 $f(u)\geqslant\frac{9}{2}$，

则 $y=\frac{1}{2u+\frac{1}{u}}\leqslant\frac{2}{9}$，当且仅当 $u=2$，即 $t=1$ 时取等号，

此时 $S_n\leqslant\frac{1}{2}a_n^2\times\frac{2}{9}=\frac{a_n^2}{9}$，

因为 $\left\{\frac{a_n^2}{9}\right\}$ 是以 $\frac{1}{9}$ 为首项，$\frac{4}{9}$ 为公比的等比数列，

所以数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和 $T_n\leqslant\frac{\frac{1}{9}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}{1-\frac{4}{9}}=\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{5}=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n$，

当 $n\to+\infty$，$T_n\to\frac{1}{5}$，所以 $T_n<\frac{1}{5}$.

因为对于 $\forall n\in N^*$，均有 $T_n<\lambda$，所以 λ 的最小值为 $\frac{1}{5}$.