陕西省西安市铁一中学2025－2026学年高三上学期十月考试

数学试题

★祝大家学习生活愉快★

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分，每小题只有一个选项符合要求

1. 数据：1，2，3，4，5，6，7，8，9，10的30%分位数是

A. 2.5　　B. 3　　C. 3.5　　D. 4

2. 复数$z=\dfrac{3-i}{i}$在复平面内对应的点所在的象限为

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 设集合$A=\{x|x$是等腰直角三角形$\}$，$B=\{x|x$是等腰三角形$\}$，$C=\{x|x$是等边三角形$\}$，$D=\{x|x$是直角三角形$\}$，则

A. $C\subseteq A$　　B. $D\subseteq A$　　C. $C\subseteq B$　　D. $D\subseteq B$

4. 若关于x的不等式$x^2+px+q<0$的解集是$\{x|-1<x<2\}$，则关于x的不等式$\dfrac{x^2+px-12}{x+q}>0$的解集是

A. $\{x|-3<x<-2$或$x>4\}$　　B. $\{x|-3<x<2$或$x>4\}$

C. $\{x|-3<x<0$或$2<x<4\}$　　D. $\{x|x<-2$或$3<x<4\}$

5. 在$\triangle ABC$中，已知$\sin^2C+\sqrt{2}\sin B\sin C=-(\cos A+\cos B)(\cos A-\cos B)$，则$A=$

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{3\pi}{4}$

6. 若直线$y=kx$是函数$y=x\ln x+1$的图象的一条切线，则实数k的值为

A. 1　　B. -1　　C. e　　D. $\dfrac{1}{e}$

7. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，A，B是抛物线上两点，且$\angle AFB=\dfrac{2\pi}{3}$，弦$AB$的中点$M$在$C$的准线的射影为$H$，则$\dfrac{|AB|}{|MH|}$的最小值为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

8. 当函数 $y=3\sin x+4\cos x$ 取得最小值时，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=$

A. $\frac{7+24\sqrt{3}}{50}$　　B. $-\frac{7+24\sqrt{3}}{50}$　　C. $-\frac{24+7\sqrt{3}}{50}$　　D. $\frac{24+7\sqrt{3}}{50}$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列，其前 n 项和为 S_n，若 $a_2=\frac{3}{2}$，$S_3=\frac{19}{4}$，则

A. $a_1=1$　　B. $a_5-a_3=\frac{35}{16}$　　C. $S_4=\frac{65}{8}$　　D. $\{S_m+2\}$ 不是等比数列

10. 设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2}=1(a>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，且 $|F_1F_2|=4$，A，B 为 C 上关于坐标原点 O 中心对称的两点，则下列说法正确的有

A. C 的实轴长为 $\sqrt{2}$　　B. $||AF_1|-|BF_1||=2\sqrt{2}$

C. 若 $S_{\triangle ABF_2}=4$，则直线 AB 的斜率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. 若 $\frac{|AF_1|}{|AF_2|}=\frac{1}{3}$，则 $BF_2\perp F_1F_2$

11. 在数学中，双曲函数是一类与三角函数类似的函数，它是工程数学中重要的函数，也是一类很重要的初等函数，最基本的双曲函数是双曲正弦函数和双曲余弦函数．已知双曲正弦函数的解析式为 $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数的解析式为 $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$（其中 e 为自然对数的底数），则下列说法正确的是

A. $\sinh(x+y)=\sinh(x)\cdot\cosh(y)-\cosh(x)\cdot\sinh(y)$

B. 函数 $f(x)=\cosh(x)\cdot\sinh(x)$ 为奇函数

C. 若直线 $y=m$ 与函数 $y=\cosh(x)$ 和 $y=\sinh(x)$ 的图象共有三个交点，这三个交点的横坐标分别为 x_1，◦ x_2，◦ x_3，则 $x_1+x_2+x_3>\ln(1+\sqrt{2})$

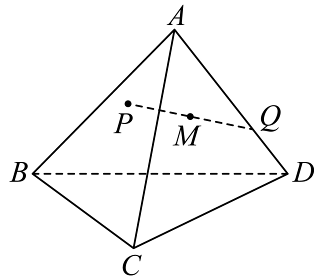
D. 若存在 $t\in[0,$◦ ◦ $\ln 3]$，关于 x 的不等式 $\sinh(t)+\cosh(x)\geqslant m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\right.$◦ ◦ $\left.\frac{7}{3}\right]$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分

12. 已知向量 $\vec{a}=(0,1)$，$\vec{b}=(1,k)$，若向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $\frac{3}{2}\vec{a}$，则 $k=$______.

13. 若函数 $f(x)=x\ln x-\frac{3a}{2}x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有两个极值点，则实数 a 的取值范围是______.

14. 如图，在四面体 $A-BCD$ 中，$\angle BAC=60^\circ$，$AD\perp AC$，$AB\perp AD$，$AB=AC=AD=4$. 点 P，Q 分别在侧面 ABC 和棱 AD 上运动，$PQ=2$，M 为线段 PQ 中点，当 P，Q 运动时，点 M 的轨迹把三棱锥 $A-BCD$ 分成上、下两部分的体积之比等于______.



四、解答题：本题共5小题，共77分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

15. 已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x+1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的周期和其图像的对称轴方程；

(2) 当 $x\in\left[0,\dfrac{5\pi}{12}\right]$ 时，求 $f(x)$ 的值域.

16. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$a=2$，且 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

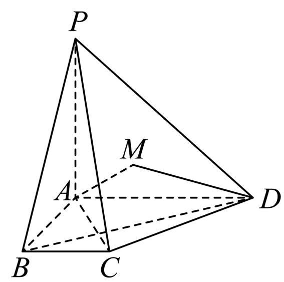
(1) 求 C 的标准方程；

(2) 若 $A(-3,0)$，直线 $l:x=ty+1(t>0)$ 交椭圆 C 于 E, F 两点，且 $\triangle AEF$ 的面积为 $\sqrt{14}$，求 t 的值.

17. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AD\parallel BC$，$AB\perp AD$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AP=AD=2AB=4BC$.

(1) 求证：平面 $PAC\perp$ 平面 PBD；

(2) $AM\perp$ 平面 PCD 于点 M，求二面角 $M-AD-P$ 的余弦值.



18. 已知函数 $f(x)=ax-\dfrac{c}{x}-b\ln x(a, b, c\in R)$.

(1) 当 $a=b=1$, $c=-2$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2) 当 $a=c=1$ 时，若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2，求证：$f(\mathrm{e}^{x_1})+f(\mathrm{e}^{x_2})+\dfrac{b^2}{2}>2\cdot\left(\sqrt{\mathrm{e}^b}-\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^b}}-\dfrac{b^2}{4}\right)$；

(3) 设 a, b 为函数 $f(x)$ 的极值点，且 $a<b$，若 a, b, c 是一个三角形的三边长，求 $a+b-c$ 的取值范围.

(参考：$\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3-2\times\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+1=0$)

19. 某商场推出购物抽奖促销活动，活动规则如下：①顾客在该商场内的消费额每满 100 元，可获得 1 张奖券；②每张奖券可以进行 1 次抽奖活动，即从装有 4 个白球、2 个红球的盒子中，随机摸取 1 个球 (每个球被摸到的可能性相同). 奖励规则：若摸出白球，则没有中奖，摸出的白球放回原盒子中，本张奖券抽奖活动结束；若摸出红球，则中奖，获得礼品 1 份，且摸出的红球不放回原盒子中，同时得到一次额外的抽奖机会 (该抽奖机会无需使用新的奖券)，继续从当前盒子中随机摸取 1 个球，其奖励规则不变；③从第二张奖券开始，使用每张奖券抽奖时均在前一张奖券抽奖活动的基础上进行；④若顾客获得 2 份礼品 (即该顾客将 2 个红球都摸出) 或使用完所获奖券，则该顾客本次购物的抽奖活动结束.

(1) 顾客甲通过在商场内消费获得了若干张奖券并进行抽奖，求事件“甲使用第 2 张奖券抽奖，中奖”的概率；

(2) 顾客乙通过在商场内消费获得了若干张奖券并进行抽奖，求事件“乙获得第 2 份礼品时，共使用了 3 张奖券”的概率；

(3) 顾客丙消费了 1000 元，设 X 表示顾客丙在这次抽奖活动中所使用奖券的数量，写出 X 的分布列并证明期望 $E(X)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{9}n\times\left[\left(\dfrac{4}{5}\right)^n-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]+10\times\left[2\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^9-\left(\dfrac{2}{3}\right)^9\right]$.

参考答案

1. C

【解析】由 $10\times30\%=3$，结合已知数据从小到大，30% 分位数是第 3、4 位两个数字的平均数，所求分位数为 $\dfrac{3+4}{2}=3.5$.

2. C

【解析】由 $z=\dfrac{3-i}{i}=\dfrac{(3-\mathrm{i})\times(-\mathrm{i})}{i\times(-\mathrm{i})}=-1-3\mathrm{i}$，可得复数 z 在复平面内对应的点为 $(-1,-3)$，所在的象限为第三象限.

3. C

【解析】直角三角形不一定是等腰直角三角形，故 B 错误；
等边三角形都是等腰三角形，故 $C\subseteq B$，故 C 正确；
等边三角形都不是等腰直角三角形，故 A 错误；
直角三角形不一定是等腰三角形，故 D 错误.

4. B

【解析】由题意可得，$x^2+px+q=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$，即 $p=-1$，$q=-2$，则有 $\dfrac{x^2+px-12}{x+q}=\dfrac{x^2-x-12}{x-2}>0$，即 $(x^2-x-12)(x-2)=(x+3)(x-4)(x-2)>0$，解得 $-3<x<2$ 或 $x>4$，即解集为 $\{x|-3<x<2$ 或 $x>4\}$.

5. D

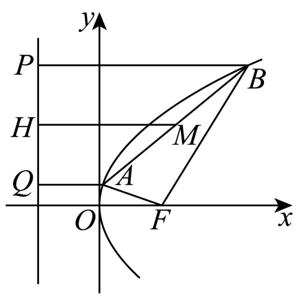
【解析】因为 $\sin^2C+\sqrt{2}\sin B\sin C=-(\cos A+\cos B)(\cos A-\cos B)=\cos^2B-\cos^2A=(1-\sin^2B)-(1-\sin^2A)=\sin^2A-\sin^2B$，
由正弦定理得：$c^2+\sqrt{2}bc=a^2-b^2$，
由余弦定理，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，
又 A 为三角形内角，所以 $A=\dfrac{3\pi}{4}$.

6. A

【解析】$\because f(x)=x\ln x+1$，$\therefore f'(x)=\ln x+1(x>0)$，
设切点坐标为 (x_0,kx_0)，则 $\begin{cases}\ln x_0+1=k\\ x_0\ln x_0+1=kx_0\end{cases}$，
消去 k，得 $x_0=1$，所以 $k=1$.

7. C

【解析】设 $|AF|=a$、$|BF|=b$，A，B 在准线的射影分别为 Q，P，如图所示，



根据抛物线的定义，可知 $|AF|=|AQ|$，$|BF|=|BP|$，

在梯形 $ABPQ$ 中，有 $|MH|=\frac{1}{2}(a+b)$，

在 $\triangle ABF$ 中，$|AB|^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=a^2+b^2+ab=(a+b)^2-ab$，

又 $\because ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，$\therefore |AB|^2\geqslant\frac{3(a+b)^2}{4}\Rightarrow|AB|\geqslant\frac{\sqrt{3}(a+b)}{2}$，

当且仅当 $a=b$ 时取等号，$\therefore \frac{|AB|}{|MH|}\geqslant\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)}{\frac{1}{2}(a+b)}=\sqrt{3}$，

故 $\frac{|AB|}{|MH|}$ 的最小值为 $\sqrt{3}$.

8. A

【解析】$y=3\sin x+4\cos x=5\sin(x+\theta)$，其中 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\frac{4}{5}$.

当 $x+\theta=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$ 时，y 取最小值，此时 $x=-\theta-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，

故 $\cos x=-\sin\theta=-\frac{4}{5}$。 $\sin x=-\cos\theta=-\frac{3}{5}$.

所以 $\sin 2x=\frac{24}{25}$，$\cos 2x=\frac{7}{25}$，故 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{24}{25}+\frac{1}{2}\times\frac{7}{25}=$
$\frac{7+24\sqrt{3}}{50}$.

9. AC

【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q\neq1)$，则由 $a_2>0$，$\{a_n\}$ 单调递增，得 $q>1$，

因为 $S_3=a_2\left(1+q+\frac{1}{q}\right)$，所以 $\frac{3}{2}\left(1+q+\frac{1}{q}\right)=\frac{19}{4}$，解得 $q=\frac{3}{2}$ 或 $q=\frac{2}{3}$（舍去），

对于 A，$a_1=\frac{a_2}{q}=1$，故 A 正确；

对于 B，$a_n=a_1q^{n-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，$a_5-a_3=\frac{81}{16}-\frac{9}{4}=\frac{45}{16}$. 故 B 错误；

对于 C，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\frac{3}{2}}=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^n-2$，$S_4=2\times\frac{81}{16}-2=\frac{65}{8}$，故 C 正确；

对于 D，$S_m+2=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^m$，$S_1+2=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^1=3$，

所以 $\{S_m+2\}$ 是首项为 3，公比为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列，故 D 错误.

10. BD

【解析】设 c 为双曲线 C 的半焦距，则 $c=\frac{|F_1F_2|}{2}=2$，

由 $a^2=c^2-2=2$，即 $a=\sqrt{2}$，所以 C 的实轴长为 $2\sqrt{2}$，故 A 错误；

由于 A，B 关于原点中心对称，F_1，F_2 关于原点中心对称，

所以四边形 AF_1BF_2 为平行四边形，所以 $|AF_1|=|BF_2|$，

所以 $||AF_1|-|BF_1||=||BF_2|-|BF_1||=2a=2\sqrt{2}$，故 B 正确；

由 $S_{\triangle ABF_2}=2S_{\triangle BOF_2}=2\cdot\frac{1}{2}|F_2O|\cdot|y_B|=4$，解得 $|y_B|=2$，所以 $|x_B|=\sqrt{2^2+2}=\sqrt{6}$，

所以直线 AB 斜率即直线 OB 斜率，$k_{OB}=\pm\frac{|y_B|}{|x_B|}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 C 错误；

由 $\dfrac{|F_1A|}{|F_2A|}=\dfrac{1}{3}$，$|AF_2|-|AF_1|=2\sqrt{2}$，可得 $|AF_2|=3\sqrt{2}$，$|AF_1|=\sqrt{2}$，

则 $|AF_1|^2+|F_1F_2|^2=2+16=18=|AF_2|^2$，所以 $AF_1\perp F_1F_2$，

又 $AF_1 /\!/ BF_2$，所以 $BF_2\perp F_1F_2$，故 D 正确.

11. BCD

【解析】对于 A，$\sinh(x+y)=\dfrac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}$，

$\sinh(x)\cdot\cosh(y)-\cosh(x)\cdot\sinh(y)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$，

化简后得 $\dfrac{e^{x-y}-e^{-x+y}}{2}\neq\dfrac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}$，故 A 错误；

对于 B，$y=\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 的定义域为 R，$\cosh(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}=\cosh(x)$，所以 $y=\cosh(x)$ 是偶函数；

$y=\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的定义域为 R，$\sinh(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}=-\sinh(x)$，所以 $y=\sinh(x)$ 是奇函数，

所以函数 $f(x)=\cosh(x)\cdot\sinh(x)$ 为奇函数，故 B 正确；

对于 C，因为直线 $y=m$ 与函数 $y=\cosh(x)$ 和 $y=\sinh(x)$ 的图象共有三个交点，$y=\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 在 R 上单调递增，即直线 $y=m$ 与函数 $y=\sinh(x)$ 只有一个交点，

所以直线 $y=m$ 与函数 $y=\cosh(x)$ 有两个交点，

因为 $y=\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\geqslant\dfrac{2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}}{2}=1$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

所以 $m>1$，即 $x_1+x_2=0$，$\dfrac{e^{x_3}-e^{-x_3}}{2}>1$，解得 $e^{x_3}>1+\sqrt{2}$，

所以 $x_3>\ln(1+\sqrt{2})$，则 $x_1+x_2+x_3>\ln(1+\sqrt{2})$，故 C 正确；

对于 D，$\sinh(t)+\cosh(x)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}+\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，$t\in[0,\ \ln3]$，

令 $g(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$，则 $g'(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}>0$，所以 $g(t)$ 在 $[0,\ \ln3]$ 上单调递增，

则 $g(t)_{\min}=g(0)=0$，$g(t)_{\max}=g(\ln3)=\dfrac{4}{3}$，

又 $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\geqslant\dfrac{2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}}{2}=1$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

所以 $\cosh(x)$ 最小值为 1，

因为存在 $t\in[0,\ \ln3]$，关于 x 的不等式 $\sinh(t)+\cosh(x)\geqslant m$ 恒成立，

所以 $m\leqslant[\sinh(t)+\cosh(x)]_{\max}=\dfrac{4}{3}+1=\dfrac{7}{3}$，

所以 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\ \dfrac{7}{3}\right]$，故 D 正确.

12. $\dfrac{1}{2}$

【解析】$\vec{a}+\vec{b}=(1,k+1)$，

向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{(1,k+1)\cdot(0,1)}{1^2}\vec{a}=(k+1)\vec{a}$，

又向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $\dfrac{3}{2}\vec{a}$，故 $k+1=\dfrac{3}{2}$，解得 $k=\dfrac{1}{2}$.

13. $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$

【解析】由题意，函数 $f(x)=x\ln x-\frac{3a}{2}x^2$，可得 $f'(x)=\ln x+1-3ax$，

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有两个极值点，

即 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等的实数根，

即 $3a=\frac{\ln x+1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等的实数根，

即函数 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$ 和 $y=3a$ 的图象有两个交点，

又由 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，可得 $g'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=1$，且当 $x\to0$ 时，$g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$时，$g(x)\to0$，

所以 $0<3a<1$，解得 $0<a<\frac{1}{3}$，即实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

14. $\frac{\pi}{48\sqrt{3}-\pi}$

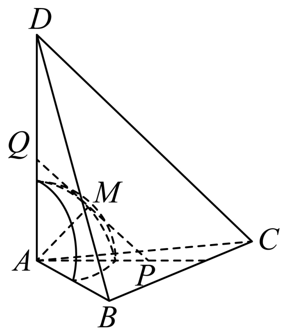
【解析】由 $AD\perp AC$，$AB\perp AD$，$AC\cap AB=A$，AC，$AB\subset$ 平面 ABC，则 $AD\perp$ 平面 ABC，

由 $AP\subset$ 平面 ABC，则 $AD\perp AP$，则 $\angle QAP=90^\circ$，而 $PQ=2$，故 $AM=1$，

则中点 M 的轨迹以 A 为球心的球面(如图)，被三个平面 ABD，ACD，ABC 所截，体积为球体的 $\frac{1}{12}$，

所以上部分体积为 $\frac{1}{12}\times\frac{4}{3}\pi\times1^3=\frac{\pi}{9}$，下部分体积为 $V=\frac{1}{3}\times4\times\frac{1}{2}\times4^2\times\sin60^\circ-\frac{\pi}{9}=\frac{48\sqrt{3}-\pi}{9}$，

所以上、下两部分的体积之比等于 $\frac{\pi}{48\sqrt{3}-\pi}$.



15. (1)$f(x)=\sqrt{3}\sin2x-\cos2x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\cos2x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；

令 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，解得 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$.

(2) 因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}$，所以 $-\frac{\pi}{6}\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}$

从而可知 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\sin\frac{\pi}{2}$，

因此 $-1\leqslant f(x)\leqslant2$，故所求值域为 $[-1,2]$.

16. (1) 由题意得：$a=2$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $c=\sqrt{2}$，则 $b^2=a^2-c^2=2$，

所以 C 的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2) 由题意设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}x=ty+1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$，消去$x$得：$(t^2+2)y^2+2ty-3=0$，

则$\Delta=4t^2+12(t^2+2)=16t^2+24>0$，

则$y_1+y_2=-\dfrac{2t}{t^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{3}{t^2+2}$，

可得$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\dfrac{4t^2}{(t^2+2)^2}+\dfrac{12}{t^2+2}}=\dfrac{2\sqrt{4t^2+6}}{t^2+2}$，

设直线l与x轴的交点为$D(1,0)$，且$A(-3,0)$，则$|AD|=1-(-3)=4$，

故$S_{\triangle AEF}=\dfrac{1}{2}|AD|\cdot|y_1-y_2|=2\times\dfrac{2\sqrt{4t^2+6}}{t^2+2}=\sqrt{14}$，解得$t=\sqrt{2}$.

17. (1) 在$Rt\triangle ABC$和$Rt\triangle ABD$中，

$\tan\angle BAC=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{1}{2}$，$\tan\angle ABD=\dfrac{AD}{AB}=2$，

$\therefore\angle BAC$与$\angle ABD$互余，所以$\angle ABD+\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$，即$AC\perp BD$.

又$PA\perp$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp BD$.

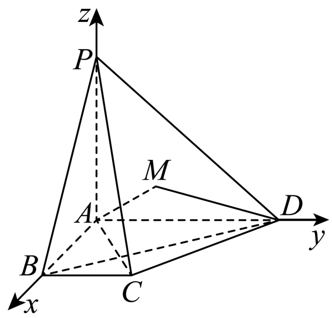
又平面PAC中，$AC\cap PA=A$，

$\therefore BD\perp$平面PAC，

又$BD\subset$平面PBD，$\therefore$平面$PAC\perp$平面PBD.

(2) $\because AB$，AD，AP两两互相垂直，

$\therefore$分别以AB，AD，AP所在直线为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系.



不妨设$BC=1$，则$A(0,0,0)$，$C(2,1,0)$，$D(0,4,0)$，$P(0,0,4)$，

$\therefore\overrightarrow{PC}=(2,1,-4)$，$\overrightarrow{PD}=(0,4,-4)$.

$\because$点M在平面PCD内，

$\therefore$设$\overrightarrow{PM}=x\overrightarrow{PC}+y\overrightarrow{PD}$，

则$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+x\overrightarrow{PC}+y\overrightarrow{PD}=(0,0,4)+x(2,1,-4)+y(0,4,-4)$

$=(2x,x+4y,4-4x-4y)$，

$\because AM\perp$平面PCD，$\therefore AM\perp PC$，$AM\perp PD$，

$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{PC}=4x+x+4y-16+16x+16y=21x+20y-16=0\\ \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{PD}=4x+16y-16+16x+16y=20x+32y-16=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=\dfrac{12}{17}\\ y=\dfrac{1}{17}\end{cases}$，

$\therefore\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{24}{17},\dfrac{16}{17},\dfrac{16}{17}\right)$，即$M\left(\dfrac{24}{17},\dfrac{16}{17},\dfrac{16}{17}\right)$，

$\therefore$ 点 M 到平面 PAD 的距离 $d_1=\dfrac{24}{17}$，

点 M 到棱 AD 的距离 $d_2=\sqrt{\left(\dfrac{24}{17}\right)^2+\left(\dfrac{16}{17}\right)^2}=\dfrac{8\sqrt{13}}{17}$，

设二面角 $M-AD-P$ 大小为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{24}{8\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$，

$\therefore \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$，

即二面角 $M-AD-P$　的　余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

18. (1) 当 $a=b=1$，$c=-2$ 时，$f(x)=x+\dfrac{2}{x}-\ln x$ 且 $x>0$，

则 $f'(x)=1-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-x-2}{x^2}=\dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2}$，

当 $0<x<2$ 时 $f'(x)<0$，当 $x>2$ 时 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(2)=3-\ln 2$

(2) 当 $a=c=1$ 时，则 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}-b\ln x$ 且 $x>0$，可得 $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{b}{x}=\dfrac{x^2-bx+1}{x^2}$，

由 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，则 x_1,x_2 是 $x^2-bx+1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上的两个不同根，

所以 $\begin{cases}\Delta=b^2-4>0\\ x_1+x_2=b>0\\ x_1x_2=1\end{cases}$，可得 $\begin{cases}b>2\\ x_1+x_2=b\\ x_1x_2=1\end{cases}$，

由 $f(e^{x_1})+f(e^{x_2})=e^{x_1}-\dfrac{1}{e^{x_1}}-bx_1+e^{x_2}-\dfrac{1}{e^{x_2}}-bx_2=e^{x_1}+e^{x_2}-\left(\dfrac{1}{e^{x_1}}+\dfrac{1}{e^{x_2}}\right)-b(x_1+x_2)=(e^{x_1}+e^{x_2})$

$\left(1-\dfrac{1}{e^b}\right)-b^2$，

所以 $f(e^{x_1})+f(e^{x_2})+\dfrac{b^2}{2}=(e^{x_1}+e^{x_2})\left(1-\dfrac{1}{e^b}\right)-\dfrac{b^2}{2}$，$1-\dfrac{1}{e^b}>0$，

所以 $f(e^{x_1})+f(e^{x_2})+\dfrac{b^2}{2}>2\sqrt{e^{x_1}e^{x_2}}\cdot\left(1-\dfrac{1}{e^b}\right)-\dfrac{b^2}{2}=2\cdot\left(\sqrt{e^b}-\dfrac{1}{\sqrt{e^b}}-\dfrac{b^2}{4}\right)$

(3) 由题设 $f'(x)=a+\dfrac{c}{x^2}-\dfrac{b}{x}=\dfrac{ax^2-bx+c}{x^2}$ 且 $x>0$，

因为 a,b 为函数 $f(x)$ 的极值点，则 $ax^2-bx+c=a(x-a)(x-b)=a[x^2-(a+b)x+ab]$，

所以 $\begin{cases}a(a+b)=b\\ a^2b=c\end{cases}$，即 $\begin{cases}a^2=b(1-a)\\ a^2b=c\end{cases}$，显然 $a\neq 1$，则 $\begin{cases}b=\dfrac{a^2}{1-a}\\ c=\dfrac{a^4}{1-a}\end{cases}$，

由 $a<b$，则 $\dfrac{a^2}{1-a}>a>0$，故 $\dfrac{a}{1-a}-1=\dfrac{2a-1}{1-a}>0\Rightarrow\dfrac{1}{2}<a<1$，易知 $b>c$，

由 a,b,c 是一个三角形的三边长，则 $a+c>b$，即 $a+\dfrac{a^4}{1-a}>\dfrac{a^2}{1-a}$，所以 $a^3-2a+1>0$，

令 $\phi(a)=a^3-2a+1$ 且 $\dfrac{1}{2}<a<1$，则 $\phi'(a)=3a^2-2$，

当 $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 时 $\phi'(a)<0$，当 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<1$ 时 $\phi'(a)>0$，

所以 $\phi(a)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},1\right)$ 上单调递增，

$\phi\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3-2\times\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+1=0$，$\phi(1)=0$，

又 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故 $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时 $\phi(a)=a^3-2a+1>0$，综上，$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

而 $a+b-c=a+\frac{a^2}{1-a}-\frac{a^4}{1-a}=a^3+a^2+a$，

由 $y=a^3+a^2+a$ 在 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ 上单调递增，

当 $a=\frac{1}{2}$，则 $a^3+a^2+a=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$，

当 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$a^3=2a-1$，则 $a^3+a^2+a=a^2+3a-1=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+3\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}-1=\sqrt{5}-1$，

故 $y\in\left(\frac{7}{8},\sqrt{5}-1\right)$，即 $a+b-c$ 的范围为 $\left(\frac{7}{8},\sqrt{5}-1\right)$.

19. (1) 设事件 A_{ij}＝“甲使用第 i 张奖券抽奖，中 j 次奖” ($\mathrm{i}=1,2,j=0,1,2$)，

则所求事件为 $A_{10}A_{21}+A_{10}A_{22}+A_{11}A_{21}$，

其概率为 $P(A_{10}A_{21}+A_{10}A_{22}+A_{11}A_{21})=P(A_{10}A_{21})+P(A_{10}A_{22})+P(A_{11}A_{21})=$

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{62}{225}$.

(2) 设事件 B_{ij}＝“乙使用第 i 张奖券抽奖，中 j 次奖” ($\mathrm{i}=1,2,3,j=0,1,2$)，

则所求事件为 $B_{11}B_{20}B_{31}+B_{10}B_{21}B_{31}+B_{10}B_{20}B_{32}$，

其概率为 $P(B_{11}B_{20}B_{31}+B_{10}B_{21}B_{31}+B_{10}B_{20}B_{32})=P(B_{11}B_{20}B_{31})+P(B_{10}B_{21}B_{31})+P(B_{10}B_{20}B_{32})$

$=\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{364}{3375}$.

(3) 由题意可知 X 的所有可能取值为 $1,2,\cdots,10$.

当 $X\leqslant 9$ 时，表示顾客丙使用 X 张奖券将 2 个红球全部摸出；

当 $X=10$ 时，表示顾客丙使用第 10 张奖券抽奖时盒子里有 1 个或 2 个红球 .

设事件“顾客丙使用第 n 张奖券抽奖时盒子里有 2 个红球”的概率为 a_n，

事件“顾客丙使用第 n 张奖券抽奖时盒子里有 1 个红球”的概率为 b_n，$n=1,2,\cdots,10$，

则 $a_1=1$，$b_1=0$，$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$，

$b_{n+1}=\frac{4}{5}\times b_n+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}\times a_n=\frac{4}{5}b_n+\frac{4}{15}a_n$，$n=1,2,\cdots,9$，

$\therefore a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，

$b_{n+1}=\frac{4}{5}b_n+\frac{4}{15}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{4}{5}b_n+\frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$，

$\therefore b_{n+1}+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\frac{4}{5}\left[b_n+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]$，$\therefore b_n=2\times\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$，$n=1,2,\cdots,10$，

$\therefore P(X=n)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}a_n+\frac{1}{5}b_n=\frac{1}{15}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{5}\times\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]=\frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]$，$n=1$，$2,\cdots,9$，

$\therefore P(X=10)=a_{10}+b_{10}=\left(\frac{2}{3}\right)^9+2\times\left[\left(\frac{4}{5}\right)^9-\left(\frac{2}{3}\right)^9\right]=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^9-\left(\frac{2}{3}\right)^9$；

$\therefore E(X)=\sum_{n=1}^{10}n\cdot P(X=n)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{9}n\times\left[\left(\frac{4}{5}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+10\times\left[2\times\left(\frac{4}{5}\right)^9-\left(\frac{2}{3}\right)^9\right]$.