湖南省长沙市雅礼中学2025-2026学年高三上学期月考(五)

数学试题

★祝大家学习生活愉快★

注意事项:

1．答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3．考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单选题:本题共8小题,每小题5分,共40分,每小题只有一个选项符合要求

1. 已知集合 $A=\{1,3\}$,则集合 A 的真子集有

A. 3个　　B. 4个　　C. 5个　　D. 6个

2. 若复数 z 满足 $\bar{z}(1+\mathrm{i})=1-3\mathrm{i}$,则复数 z 在复平面内所对应的点在

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知圆台的上、下底面的面积分别为 π, 4π,侧面积为 6π,则该圆台的体积为

A. $\dfrac{14\sqrt{3}\pi}{3}$　　B. $\dfrac{16\sqrt{3}\pi}{3}$　　C. $\dfrac{7\sqrt{3}\pi}{3}$　　D. $4\sqrt{3}\pi$

4. 已知平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $\vec{a}=(\sqrt{3},1)$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=11$,则向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为

A. $\left(\dfrac{11\sqrt{3}}{2},\dfrac{11}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{11\sqrt{3}}{4},\dfrac{11}{4}\right)$　　C. $\left(\dfrac{11\sqrt{2}}{4},\dfrac{11\sqrt{6}}{4}\right)$　　D. $\left(\dfrac{11}{4},\dfrac{11\sqrt{3}}{4}\right)$

5. 已知 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\sin 2x=\cos x$,则 $x=$

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $-\dfrac{\pi}{6}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $-\dfrac{\pi}{3}$

6. 甲、乙两名羽毛球运动员进行一场比赛,采用5局3胜制(先胜3局者胜,比赛结束),已知每局比赛甲获胜的概率为 $\dfrac{3}{5}$,则甲第一局获胜并最终以 $3:1$ 获胜的概率为

A. $\dfrac{108}{125}$　　B. $\dfrac{216}{625}$　　C. $\dfrac{108}{625}$　　D. $\dfrac{54}{625}$

7. 已知 $a>b>0$,椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,双曲线 C_2 的方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$, C_1 与 C_2 的离心率之积为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,则双曲线 C_2 两条渐近线的夹角大小为

A. 30°　　B. 60°　　C. 90°　　D. 120°

8. 已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, $BC>AC>AB=1$,且 $BC\cdot\sin B=2$,则 $\triangle ABC$ 的最大内接正方形的面积为

A. $\dfrac{4}{9}$　　B. 1　　C. $\dfrac{9}{16}$　　D. 4

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 下列有关说法正确的有

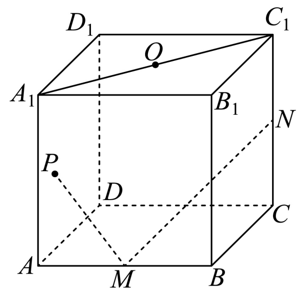
A. 设随机变量ξ服从正态分布$N(\mu,2)$，若$P(\xi<1)=P(\xi>9)$，则$\mu=5$

B. 记两个变量的样本相关系数为r，若$|r|$越接近0，线性相关程度越强

C. 已知随机变量$\xi\sim B\left(4,\dfrac{1}{4}\right)$，则$E(3\xi-2)=1$

D. 数据1，3，9，4，5，16，7，11的下四分位数为3.5

10. 在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M，N，O分别为AB，CC_1，A_1C_1的中点，点P是正方体侧面ADD_1A_1上的一动点(含边界)，则下列说法正确的是



A. 异面直线MN与A_1C_1所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B. 当点P为棱AA_1的中点时，直线PO与直线MN平行

C. 若保持$|MP|=2$，则点P在侧面ADD_1A_1内运动路径的长度为$\sqrt{3}\pi$

D. 过直线MN的平面截该正方体的内切球O'所得截面圆的面积的最小值为$\dfrac{\pi}{2}$

11. 已知$g(x)=2+m\cos x+n\sin x+M\cos 2x+N\sin 2x$，其中$m$，$n$，$M$，$N$为常数，且$g(x)\geqslant 0$对任意$x\in R$恒成立，则

A. $m^2+n^2\leqslant 8$　　　　B. $M^2+N^2>4$

C. $|m|+|n|+|M|+|N|\leqslant 2\sqrt{2}+4$　　　　D. $g(x)\leqslant 6$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分

12. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\ln x,x\geqslant 2\\ x^2+x+1,x<2\end{cases}$，则$f[f(1)]=$______.

13. 记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_{14}=14$，则$a_7+a_8=$______.

14. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，过点F的直线l与抛物线C交于$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$两点，O为坐标原点，若$\cos\angle MON=-\dfrac{1}{3}$，则$\sin\angle MOF\cdot\sin\angle NOF=$______.

四、解答题：本题共5小题，共77分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

15. 已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=6$，且满足$a_{n+1}+2^{n+1}=4a_n$.

(1) 求证：$\{a_n-2^n\}$是等比数列；

(2) 求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

16. 海水稻的灌溉是将海水稀释后进行灌溉. 某试验基地为了研究海水浓度 x(‰) 对亩产量 y(吨) 的影响，通过在试验田的种植实验，测得了某种海水稻的亩产量与海水浓度的数据如表. 绘制散点图发现，可用线性回归模型拟合亩产量 y 与海水浓度 x 之间的相关关系，用最小二乘法计算得 y 与 x 之间的经验回归方程为 $\hat{y}=bx+0.88$.

海水浓度 x_i(‰)	3	4	5	6	7
亩产量 y_i (吨)	0.62	0.58	0.49	0.4	0.31
残差 $\hat{e}_i$					

(1) 请你估计：当浇灌海水浓度为 8‰ 时，该品种海水稻的亩产量；

(2) (i) 完成上述残差表；

(*ii*) 在统计学中，常用决定系数 R^2 来刻画回归效果，R^2 越大，模型拟合效果越好，并用它来说明响应变量与解释变量的相关性. 你能否利用以上表格中的数据，计算决定系数 R^2，并判断模型的拟合效果.(计算中数据精确到 0.01)

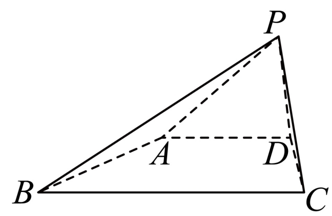
(附：残差 $\hat{e}_i=y_i-\hat{y}_i$，决定系数 $R^2=1-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$)

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\triangle PAD$ 为等边三角形，$AB\perp$ 平面 PCD，且 $AD\,/\!/\,BC$，$AD<BC$，$PB=PC=\sqrt{5}$，$PA=\sqrt{2}$，$\angle PAB=\dfrac{3\pi}{4}$.

(1) 证明: $CD\perp$ 平面 PAB；

(2) 若四棱锥 $P-ABCD$ 的各个顶点均在球 O 的表面上，求球 O 的表面积；

(3) 点 B 关于平面 PAD 的对称点为 M，求点 M 到平面 PCD 的距离.



18. 已知函数 $f(x)=\ln x$，$a\in R$.

(1) 求函数 $h(x)=af(x)+(x+1)^2$ 的单调区间；

(2) 当 $a>0$ 时，对任意 $x\in[1,+\infty)$，均有 $af(x)+(x+1)^2-\dfrac{x^2}{a}\leqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

19. 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 6，短轴长为 4，O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 M 的方程；

(2) 求内接于椭圆 M 的菱形 $ABCD$ 的周长的最大值；

(3) 在 (2) 中取得最大值的条件下，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$ 且 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_4\leqslant x_3$，$y_2<y_4$，点 P 是椭圆 M 上第一象限的点，直线 AB 与直线 PD 交于点 E，直线 PC 与直线 $x=-a$ 交于点 F，求证：$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DEF}$.

参考答案

1. A

【解析】集合 $A=\{1,3\}$,包含2个元素,故真子集个数为 $2^2-1=3$.

2. B

【解析】$\bar{z}(1+\mathrm{i})=1-3\mathrm{i}$,则 $\bar{z}=\dfrac{1-3i}{1+i}=\dfrac{(1-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{-2-4i}{2}=-1-2\mathrm{i}$,$z=-1+2\mathrm{i}$,在复平面内所对应的点为 $(-1,2)$,位于第二象限.

3. C

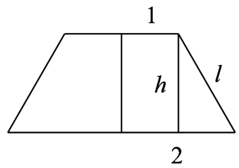
【解析】设圆台上、下底面圆的半径分别为 r_1, r_2,圆台上、下底面圆的面积分别为 S_1, S_2,圆台高为 h,母线长为 l,

因为圆台的上、下底面的面积分别为 π, 4π,

所以 $S_1=\pi r_1^2=\pi$, $S_2=\pi r_2^2=4\pi$,解得 $r_1=1$, $r_2=2$,

由题意得,圆台的侧面积为 $\pi(r_1+r_2)l=3\pi l=6\pi$,所以 $l=2$,

作圆台的轴截面,如图:



所以圆台的高 $h=\sqrt{l^2-(r_2-r_1)^2}=\sqrt{3}$,

所以圆台的体积 $V=\dfrac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h=\dfrac{1}{3}(\pi+\sqrt{\pi\times4\pi}+4\pi)\times\sqrt{3}=\dfrac{7\sqrt{3}\pi}{3}$.

4. B

【解析】向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为 $\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\dfrac{11}{4}\vec{a}=\dfrac{11}{4}(\sqrt{3},1)=\left(\dfrac{11\sqrt{3}}{4},\dfrac{11}{4}\right)$.

5. A

【解析】由 $\sin2x=\cos x\Rightarrow2\sin x\cos x=\cos x$,因为 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以 $\cos x\neq0$,所以由 $2\sin x\cos x=\cos x\Rightarrow2\sin x=1\Rightarrow\sin x=\dfrac{1}{2}$,因为 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以 $x=\dfrac{\pi}{6}$.

6. C

【解析】由甲第一局获胜并最终以3:1获胜可知第1,4局甲胜,第2,3局甲胜了一场,因为每局比赛甲获胜的概率为 $\dfrac{3}{5}$,所以甲输的概率为 $1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$,所以所求概率为 $\dfrac{3}{5}\times\left(C_2^1\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{108}{625}$.

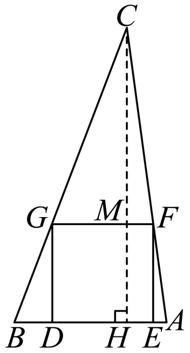
7. B

【解析】$\because$ 椭圆 C_1 的离心率 $e_1=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$,双曲线 C_2 的离心率 $e_2=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$,$\therefore e_1e_2=\dfrac{\sqrt{a^4-b^4}}{a^2}=\sqrt{1-\dfrac{b^4}{a^4}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,$\therefore\dfrac{b^4}{a^4}=1-\dfrac{8}{9}=\dfrac{1}{9}$,$\therefore\dfrac{a}{b}=\sqrt{3}$,$\therefore$ 设双曲线渐近线的倾斜角为 θ,则 $\tan\theta=\pm\dfrac{a}{b}=\pm\sqrt{3}$,即渐近线的倾斜角分别为 60° 和 120°,又两条直线夹角 α 的范围为:$0^\circ\leqslant\alpha\leqslant90^\circ$,$\therefore$ 双曲线 C_2 两条渐近线的夹角大小为 $120^\circ-60^\circ=60^\circ$.

8. A

【解析】设 $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$,则 $a>b>c=1$, $a\sin B=2$,则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times2\times1=1$,如图:$\triangle ABC$ 的最大内接正方形为 $DEFG$,过 C 作 $CH\perp AB$ 于 H,交 GF 于 M,设正方形的边长为 x,则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot CH=\dfrac{1}{2}\times c\cdot CH=1$,故 $CH=2$,由相似可得 $\dfrac{CM}{CH}=\dfrac{GF}{AB}$,即 $\dfrac{CM}{2}=\dfrac{x}{1}$,故 $CM=2x$,则

$MH=CH-CM=2-2x=x$，故 $x=\dfrac{2}{3}$，因此正方形 $DEFG$ 的面积为 $x^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$.



9. ACD

【解析】A：因为随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,2)$，且 $P(\xi<1)=P(\xi>9)$，所以 $\mu=\dfrac{1+9}{2}=5$，因此本选项说法正确；

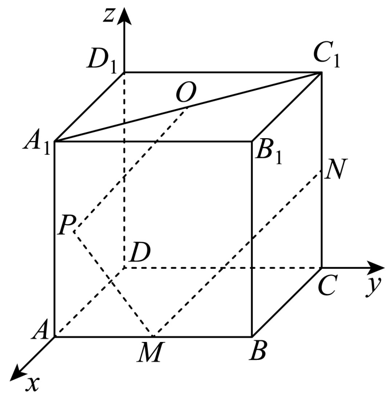
B：由样本相关系数的性质可知：$|r|$ 越接近 0，线性相关程度越弱，因此本选项说法不正确；

C：因为 $\xi\sim B\left(4,\dfrac{1}{4}\right)$，所以 $E(\xi)=4\times\dfrac{1}{4}=1$，所以 $E(3\xi-2)=3E(\xi)-2=3\times1-2=1$，因此本选项说法正确；

D：数据 1，3，9，4，5，16，7，11 从小到大排列为：1，3，4，5，7，9，11，16，因为 $25\%\times8=2$ 所以这组数据的下四分位数为 $\dfrac{3+4}{2}=3.5$，因此本选项说法正确.

10. AD

【解析】如图，以正方体的顶点 D 为坐标原点建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

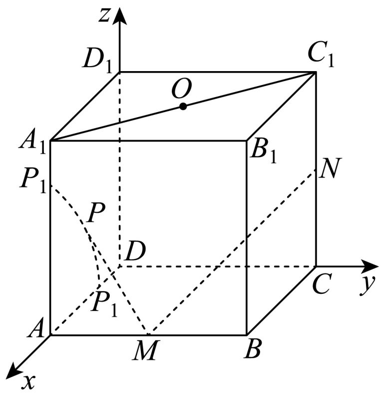


$\therefore A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$A_1(2,0,2)$，$B_1(2,2,2)$，$C_1(0,2,2)$，$D_1(0,0,2)$，因 M，N，O 分别为 AB，CC_1，A_1C_1 的中点，则 $M(2,1,0)$，$N(0,2,1)$，则 $\overrightarrow{MN}=(-2,1,1)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0)$，

对于 A，设 MN 与 A_1C_1 所成的角为 α，则 $\cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1C_1}\right|}=\dfrac{6}{\sqrt{6}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 A 正确；

对于 B，$P(2,0,1)$，$O(1,1,2)$，则 $\overrightarrow{PO}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{MN}=(-2,1,1)$，故不存在实数 λ 使得 $\overrightarrow{PO}=\lambda\overrightarrow{MN}$，故 B 错误；

对于 C，$\because |MP|=2$，$\therefore$ 点 P 在侧面 ADD_1A_1 的运动轨迹为平面 ADD_1A_1 与球 M 截面的 $\dfrac{1}{4}$ 圆弧，球心 M 到平面 ADD_1A_1 的距离为 $|AM|=1$，$\therefore$ 圆弧的半径 $r=\sqrt{|MP|^2-|MA|^2}=\sqrt{3}$，故 P 在正方体侧面 ADD_1A_1 的运动轨迹圆弧 $\overset{\frown}{P_1P_2}$，其长度为 $\dfrac{1}{4}\times2\pi\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$，故 C 错误；



对于D，易得该正方体的内切球O'的球心$O'(1,1,1)$，半径$r=1$，则向量$\overrightarrow{MO'}=(-1,0,1)$，$\therefore$球心$O'$到直线$MN$的距离$d=\sqrt{|O'M|^2-\left(\frac{\overrightarrow{MO'}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}\right)^2}=\sqrt{2-\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore$球心$O'$到过直线$MN$的平面最大距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时截面为面积最小的圆，圆的半径$r_0=\sqrt{r^2-d^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore$此时截面面积$S=\pi r_0^2=\frac{\pi}{2}$，故$D$正确.

11. ACD

【解析】$\because g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+g(x)=4+(m+n)\cos x+(n-m)\sin x\geqslant 0\ \therefore\sqrt{(m+n)^2+(n-m)^2}\leqslant 4$，$\therefore m^2+n^2\leqslant 8$，$A$正确；

$\because g(x+\pi)+g(x)=4+2M\cos 2x+2N\sin 2x\geqslant 0$，$\therefore\sqrt{(2M)^2+(2N)^2}\leqslant 4$，$\therefore M^2+N^2\leqslant 4$，$B$不正确；

$\because |m|+|n|\leqslant\sqrt{2}\times\sqrt{m^2+n^2}\leqslant 4$，$|M|+|N|\leqslant\sqrt{2}\times\sqrt{M^2+N^2}\leqslant 2\sqrt{2}$，$\therefore |m|+|n|+|M|+|N|\leqslant 2\sqrt{2}+4$，$C$正确；

$\because\begin{cases}\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0\\ \sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0\end{cases}$，$\begin{cases}\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{8\pi}{3}\right)=0,\\ \sin 2x+\sin\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(2x+\frac{8\pi}{3}\right)=0,\end{cases}$

$\therefore g(x)+g\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+g\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=6$，$\because g\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+g\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\geqslant 0$，$\therefore 0\leqslant g(x)\leqslant 6$.$D$正确.

12. ln3

【解析】由题意知，$f(1)=3$，$f[f(1)]=f(3)=\ln 3$.

13. 2

【解析】由题意得$S_{14}=\frac{14(a_1+a_{14})}{2}=7(a_7+a_8)=14$，所以$a_7+a_8=2$.

14. $\frac{4}{9}$

【解析】抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，

易知直线l斜率不为0，设直线l的方程为$x=my+\frac{p}{2}$，联立$\begin{cases}y^2=2px\\ x=my+\frac{p}{2}\end{cases}$，则$y^2-2mpy-p^2=0$，

所以$\Delta=4m^2p^2+4p^2>0$，$y_1y_2=-p^2$，所以$x_1x_2=\frac{y_1^2}{2p}\times\frac{y_2^2}{2p}=\frac{(-p^2)^2}{4p^2}=\frac{p^2}{4}$，

因为$\overrightarrow{OM}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{ON}=(x_2,y_2)$，所以$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=-\frac{3}{4}p^2$，

又因为$\cos\angle MON=-\frac{1}{3}$，所以$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|\cos\angle MON=-\frac{1}{3}|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|$，

所以 $-\frac{1}{3}|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|=-\frac{3}{4}p^2$，即 $|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|=\frac{9}{4}p^2$，$\sin\angle MOF\cdot\sin\angle NOF=\frac{|y_1|}{|\overrightarrow{OM}|}\cdot\frac{|y_2|}{|\overrightarrow{ON}|}=\frac{p^2}{\frac{9}{4}p^2}=\frac{4}{9}$.

15. (1) 因 $a_{n+1}+2^{n+1}=4a_n$，则 $a_{n+1}-2^{n+1}=4a_n-2^{n+2}=4(a_n-2^n)$，

又 $a_1-2=4$，所以 $a_n-2^n>0$，从而 $\frac{a_{n+1}-2^{n+1}}{a_n-2^n}=4$，则 $\{a_n-2^n\}$ 是以 4 为首项，公比为 4 的等比数列.

(2) 由 (1) 可得：$a_n-2^n=4^n\Rightarrow a_n=2^n+4^n$.

则 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=(2+4)+(2^2+4^2)+\cdots+(2^n+4^n)$

$=(2+2^2+\cdots+2^n)+(4+4^2+\cdots+4^n)=2\times\frac{1-2^n}{1-2}+4\times\frac{1-4^n}{1-4}$

$=2^{n+1}-2+\frac{4^{n+1}}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4^{n+1}}{3}+2^{n+1}-\frac{10}{3}$.

16. (1) 根据题中数据可知 $\bar{x}=\frac{3+4+5+6+7}{5}=5$，$\bar{y}=\frac{0.62+0.58+0.49+0.4+0.31}{5}=0.48$，

将样本中心点 $(\bar{x},\bar{y})$ 的坐标 $(5,0.48)$ 代入经验回归方程 $\hat{y}=bx+0.88$ 得 $0.48=5b+0.88$，解得 $b=-0.08$，

所以经验回归方程为 $\hat{y}=-0.08x+0.88$.

当 $x=8$ 时，$\hat{y}=-0.08\times8+0.88=0.24$，即当浇灌海水浓度为 8‰ 时，该品种海水稻的亩产量为 0.24 吨.

(2) (i) 由经验回归方程 $\hat{y}=-0.08x+0.88$ 可得

$\hat{y}_1=-0.08\times3+0.88=0.64$，$\hat{e}_1=0.62-0.64=-0.02$；

$\hat{y}_2=-0.08\times4+0.88=0.56$，$\hat{e}_2=0.58-0.56=0.02$；

$\hat{y}_3=-0.08\times5+0.88=0.48$，$\hat{e}_3=0.49-0.48=0.01$；

$\hat{y}_4=-0.08\times6+0.88=0.4$，$\hat{e}_4=0.4-0.4=0$；

$\hat{y}_5=-0.08\times7+0.88=0.32$，$\hat{e}_5=0.31-0.32=-0.01$.

所以残差表如下：

海水浓度 x_i(‰)	3	4	5	6	7
亩产量 y_i (吨)	0.62	0.58	0.49	0.4	0.31
残差 $\hat{e}_i$	-0.02	0.02	0.01	0	-0.01

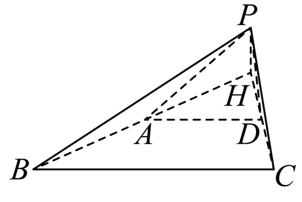
(ii) 由上数据可知 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2=2\times(0.02^2+0.01^2)=0.001$，

$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=(0.62-0.48)^2+(0.58-0.48)^2+(0.49-0.48)^2+(0.4-0.48)^2+(0.31-0.48)^2=0.065$，

所以决定系数 $R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=1-\frac{0.001}{0.065}=\frac{64}{65}\approx0.98$，与 1 比较接近，

所以拟合效果较好.

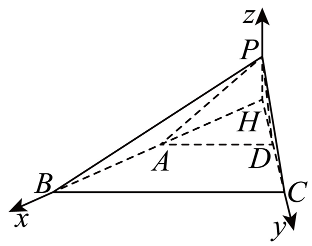
17. (1) 分别延长 BA，CD 交于 H，连接 PH，如图.



因　为　$AB\perp$ 平面 PCD，即 $AH\perp$ 平面 PCH，而 DH、$PH\subset$ 平面 PCH，所以 $AH\perp DH$，$AH\perp PH$.

因为 $\angle PAB=\dfrac{3\pi}{4}$，所以 $\angle PAH=\dfrac{\pi}{4}$，则 $\triangle PAH$ 为等腰直角三角形，所以 $HA=HP$. 又因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形，则 $PD=AD$，所以 $\triangle HDP\cong\triangle HDA$，所以 $DH\perp PH$. 而 $DH\perp AH$，$AH\cap PH=H$，所以 $DH\perp$ 平面 PAH，即 $CD\perp$ 平面 PAB.

(2) 由 (1) 可知 HA，HD，HP 两两垂直，则以 H 为坐标原点，分别以 HA，HD，HP 所在直线为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系 $H-xyz$，如图.



因为 $PA=\sqrt{2}$，则 $HA=HP=HD=1$，而 $PB=PC=\sqrt{5}$，则 $HB=HC=2$. 所以 $A(1,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,1)$.

设球心 $O(x,y,z)$，球 O 半径为 r，则有 $OP^2=x^2+y^2+(z-1)^2=r^2$，$OA^2=(x-1)^2+y^2+z^2=r^2$，

$OB^2=(x-2)^2+y^2+z^2=r^2$，$OC^2=x^2+(y-2)^2+z^2=r^2$，

$OD^2=x^2+(y-1)^2+z^2=r^2$.

联立以上五个式子，解得 $x=y=z=\dfrac{3}{2}$，$r^2=\dfrac{19}{4}$，所以球 O 的表面积为 $4\pi\cdot\dfrac{19}{4}=19\pi$.

(3) 设平面 PAD 的法向量 $\vec{a}=(x,y,z)$，因为 $\overrightarrow{PA}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$，则有 $\begin{cases}\vec{a}\cdot\overrightarrow{PA}=x-z=0\\ \vec{a}\cdot\overrightarrow{PD}=y-z=0\end{cases}$，

取 $x=1$，则得 $\vec{a}=(1,1,1)$，因为 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，则点 B 到平面 PAD 的距离为 $\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}\right|}{\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

设点 B 关于平面 PAD 的对称点 $M(m,n,t)$，则 $\overrightarrow{AM}=(m-1,n,t)$，则点 M 到平面 PAD 的距离为 $\dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{a}\right|}{\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{|m-1+n+t|}{\sqrt{3}}$，则有 $\dfrac{|m-1+n+t|}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，即 $|m-1+n+t|=1$. 因为 $\overrightarrow{BM}=(m-2,n,t)$，则由对称性可得 $\overrightarrow{BM}\parallel\vec{a}$，则得 $m-2=n=t$，代入 $|m-1+n+t|=1$ 中的 $|m-1+m-2+m-2|=1$，解得 $m=2$ (同点 B，故舍) 或 $m=\dfrac{4}{3}$，则 $M\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$.

由题可取平面 PCD 法向量为 $\vec{b}=(1,0,0)$，因为 $\overrightarrow{PM}=\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{5}{3}\right)$，则 M 到平面 PCD 的距离为 $\dfrac{\left|\overrightarrow{PM}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{4}{3}$

18. (1) 由题可知函数 $h(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$h'(x)=\dfrac{a}{x}+2(x+1)=\dfrac{2x^2+2x+a}{x}$，

当 $a\geqslant 0$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$；

当 $a<0$ 时，令 $h'(x)=0$，解得：$x=\dfrac{-1+\sqrt{1-2a}}{2}$ ($\dfrac{-1-\sqrt{1-2a}}{2}$ 舍去)，

所以 $x\in\left(0,\dfrac{-1+\sqrt{1-2a}}{2}\right)$ 时，$h'(x)<0$ 时，$x\in\left(\dfrac{-1-\sqrt{1-2a}}{2},+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 的单调递减区间是 $\left(0,\dfrac{-1+\sqrt{1-2a}}{2}\right)$，单调递增区间是 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-2a}}{2},+\infty\right)$.

综上所述，$a\geqslant 0$ 时，$h(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$，无单调减区间；$a<0$ 时，$h(x)$ 的单调递减区间是 $\left(0,\dfrac{-1+\sqrt{1-2a}}{2}\right)$，单调递增区间是 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-2a}}{2},+\infty\right)$.

(2) 由题可知 $af(1)+(1+1)^2-\dfrac{1}{a}\leqslant 0$，可得 $0<a\leqslant\dfrac{1}{4}$，只需证明当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{4}$ 时，$\forall x\in[1,+\infty)$，

$af(x)+(x+1)^2-\dfrac{x^2}{a}\leqslant 0$ 恒成立，等价于 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{(x+1)^2}{a}-\ln x\geqslant 0$，令 $t=\dfrac{1}{a}$，则 $t\geqslant 4$，

设 $g(t)=x^2t^2-(x+1)^2t-\ln x$，对称轴 $t=\dfrac{(x+1)^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2\leqslant 2$，

故有 $g(t)\geqslant g(4)=16x^2-4(x+1)^2-\ln x$.

令 $\varphi(x)=16x^2-4(x+1)^2-\ln x(x\geqslant 1)$，则 $\varphi'(x)=32x-8(x+1)-\dfrac{1}{x}=24x-8-\dfrac{1}{x}\geqslant 24\times 1-8-1>0$，

所以 $\varphi(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，且 $\varphi(1)=0$，所以 $\varphi(x)\geqslant 0$，所以 $g(t)\geqslant 0$ 恒成立.

即 $\forall x\in[1,+\infty)$，均有 $af(x)+(x+1)^2-\dfrac{x^2}{a}\leqslant 0$ 恒成立，

所以实数 a 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$.

19. (1) 由题意可知 $\begin{cases}2a=6\\2b=4\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$，所以椭圆 M 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2) 法 1：由对称性可知 AC，BD 的中点为原点 O，且 $OA\perp OB$，

设 $\angle AOx=\theta$，$\angle BOx=\theta+\dfrac{\pi}{2}$，则 $A(|OA|\cos\theta,|OA|\sin\theta)$，$B\left(|OB|\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right),|OB|\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$，

代入椭圆 M 的方程得 $\begin{cases}\dfrac{|OA|^2\cos^2\theta}{9}+\dfrac{|OA|^2\sin^2\theta}{4}=1\\\dfrac{|OB|^2\sin^2\theta}{9}+\dfrac{|OB|^2\cos^2\theta}{4}=1\end{cases}$，

所以 $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}=\dfrac{\cos^2\theta}{9}+\dfrac{\sin^2\theta}{4}+\dfrac{\sin^2\theta}{9}+\dfrac{\cos^2\theta}{4}=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{36}$，

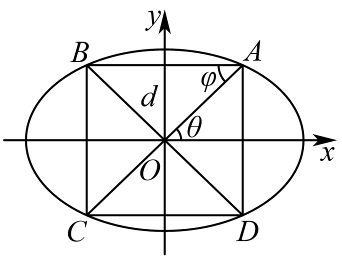
所以 $|AB|^2=|OA|^2+|OB|^2=\dfrac{13}{36}|OA|^2\cdot|OB|^2$，

设原点 O 到 AB 的距离为 d，$\angle OAB=\varphi$，则 $d=\dfrac{|OA|\cdot OB|}{|AB|}=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$，$\tan\varphi=\dfrac{OB}{OA}\in\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right]$，

所以 $|OA|=\dfrac{d}{\sin\varphi}$，所以 $|AB|=\dfrac{|OA|}{\cos\varphi}=\dfrac{d}{\sin\varphi\cos\varphi}=d\left(\tan\varphi+\dfrac{1}{\tan\varphi}\right)$，

由对勾函数性质可知，当 $\tan\varphi=\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{3}{2}$ 时，$|AB|_{\max}=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}\times\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{3}\right)=\sqrt{13}$，

所以菱形 $ABCD$ 的周长的最大值为 $4\sqrt{13}$.



法 2：由法 1 可知 $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}=\dfrac{13}{36}$，

所以 $|AB|^2=|OA|^2+|OB|^2=\frac{36}{13}\times\left(\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}\right)(|OA|^2+|OB|^2)=\frac{36}{13}\left(2+\frac{|OB|^2}{|OA|^2}+\frac{|OA|^2}{|OB|^2}\right)$，

设 $t=\frac{|OA|^2}{|OB|^2}\in\left[\frac{4}{9},\frac{9}{4}\right]$，$g(t)=\frac{36}{13}\left(2+t+\frac{1}{t}\right)$，由对勾函数性质可知 $g(t)$ 在 $\left[\frac{4}{9},1\right]$ 上单调递减，在 $\left(1,\frac{9}{4}\right]$ 上单调递增，且 $g(1)=\frac{144}{13}$，$g\left(\frac{4}{9}\right)=g\left(\frac{9}{4}\right)=13$，则 $g(t)\in\left[\frac{144}{13},13\right]$，所以 $|AB|\in\left[\frac{12\sqrt{13}}{13},\sqrt{13}\right]$，

所以菱形 $ABCD$ 的周长的最大值为 $4\sqrt{13}$，

法 3：①当直线 AB 的斜率不存在时，不妨设 $A(x,x)$，计算得 $|AB|=\frac{12\sqrt{13}}{13}$，菱形 $ABCD$ 的周长为 $\frac{48\sqrt{13}}{13}$；

②当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=kx+t$，

联立 $\begin{cases}y=kx+t\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，整理得 $(4+9k^2)x^2+18ktx+9t^2-36=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1\cdot x_2=\frac{9t^2-36}{4+9k^2}$，$x_1+x_2=\frac{-18kt}{4+9k^2}$，且 $\Delta=144(9k^2-t^2+4)>0$，

因为 $OA\perp OB$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+kt(x_1+x_2)+t^2$

$=\frac{(1+k^2)(9t^2-36)-18k^2t^2+t^2(4+9k^2)}{1+9k^2}=\frac{13l^2-36(1+k^2)}{1+9k^2}=0$，

所以 $\frac{t^2}{1+k^2}=\frac{36}{13}$.

所以原点 O 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$，

设 $\angle OAB=\varphi$，则 $\tan\varphi=\frac{OB}{OA}\in\left[\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right]$，

所以 $|OA|=\frac{d}{\sin\varphi}$，所以 $|AB|=\frac{|OA|}{\cos\varphi}=\frac{d}{\sin\varphi\cos\varphi}=d\left(\tan\varphi+\frac{1}{\tan\varphi}\right)$，

由对勾函数性质可知，当 $\tan\varphi=\frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{2}$ 时，$|AB|_{\max}=\frac{6\sqrt{13}}{13}\times\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)=\sqrt{13}$，

所以菱形 $ABCD$ 的周长的最大值为 $4\sqrt{13}$.

法 4：①直线 OA 的斜率不存在时，$|AB|=\sqrt{13}$，菱形 $ABCD$ 的周长为 $4\sqrt{13}$；

②直线 OA 的斜率存在时，设直线 OA 的方程为 $y=kx$，

联立 $\begin{cases}y=kx\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，整理得 $(4+9k^2)x^2=36$，所以 $|OA|=\sqrt{1+k^2}\,|x_A|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{6}{\sqrt{4+9k^2}}=\frac{6\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{4+9k^2}}$，

同理可得 $|OB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{4+\frac{9}{k^2}}}=\frac{6\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{4k^2+9}}$，

因为 $OA\perp OB$，所以 $|AB|^2=|OA|^2+|OB|^2=36\left(\frac{1+k^2}{4+9k^2}+\frac{1+k^2}{4k^2+9}\right)$，

设 $r_1=\frac{1+k^2}{4+9k^2}$，$r_2=\frac{1+k^2}{4k^2+9}$，所以 $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=13$. 所以 $|AB|^2=36\times\frac{1}{13}\times(r_1+r_2)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)=\frac{36}{13}\left(2+\frac{r_2}{r_1}+\frac{r_1}{r_2}\right)$，

设 $t=\frac{r_1}{r_2}=\frac{4k^2+9}{4+9k^2}=\frac{\frac{4}{9}(4+9k^2)+\frac{65}{9}}{4+9k^2}=\frac{4}{9}+\frac{\frac{65}{9}}{4+9k^2}\in\left(\frac{4}{9},\frac{9}{4}\right]$，则 $h(t)=\frac{36}{13}\left(2+t+\frac{1}{t}\right)\geqslant \frac{36}{13}\left(2+2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}\right)=\frac{144}{13}$，当且仅当 $t=\frac{1}{t}$，即 $t=1$ 时等号成立，

又因为 $h\left(\frac{4}{9}\right)=13$，$h\left(\frac{9}{4}\right)=13$，则由对勾函数性质可知 $h(t)\in\left[\frac{144}{13},13\right]$，所以 $|AB|\in\left[\frac{12\sqrt{13}}{13},\sqrt{13}\right]$，

综上，菱形 $ABCD$ 的周长的最大值为 $4\sqrt{13}$.

(3) 法 1：设 $P(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}=1$，其中 $x_0>0$，$y_0>0$，

由题可知 $A(-3.0)$，$B(0,-2)$，$C(3,0)$，$D(0,2)$，易知直线 AB 的方程为 $y=-\frac{2}{3}x-2$，

直线 AD 的方程为 $y=\frac{2}{3}x+2$，直线 PD 的方程为 $y=\frac{y_0-2}{x_0}x+2$，直线 PC 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-3}(x-3)$，

联立 $\begin{cases}y=-\frac{2}{3}x-2\\ y=\frac{y_0-2}{x_0}x+2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_E=\frac{-12x_0}{2x_0+3y_0-6}\\ y_E=\frac{4x_0-6y_0+12}{2x_0+3y_0-6}\end{cases}$，所以点 E 为 $\left(\frac{-12x_0}{2x_0+3y_0-6},\frac{4x_0-6y_0+12}{2x_0+3y_0-6}\right)$，

联立 $\begin{cases}y=\frac{y_0}{x_0-3}(x-3)\\ x=-3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_F=-3\\ y_F=\frac{-6y_0}{x_0-3}\end{cases}$，所以点 F 为 $\left(-3,\frac{-6y_0}{x_0-3}\right)$，

所以 $k_{EF}=\frac{\frac{4x_0-6y_0+12}{2x_0+3y_0-6}+\frac{6y_0}{x_0-3}}{\frac{-12x_0}{2x_0+3y_0-6}+3}=\frac{(4x_0-6y_0+12)(x_0-3)+6y_0(2x_0+3y_0-6)}{[-12x_0+3(2x_0+3y_0-6)](x_0-3)}$

$=\frac{4x_0^2+18y_0^2+6x_0y_0-18y_0-36}{-6x_0^2+9x_0y_0-27y_0+54}=\frac{9y_0^2+6x_0y_0-18y_0}{-6x_0^2+9x_0y_0-27y_0+\frac{3}{2}(4x_0^2+9y_0^2)}=\frac{9y_0^2+6x_0y_0-18y_0}{\frac{27}{2}y_0^2+9x_0y_0-27y_0}=\frac{2}{3}=k_{AD}$，

所以 $EF\parallel AD$，所以 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DEF}$.

法 2：设直线 PD 的方程为 $y=kx+2$，

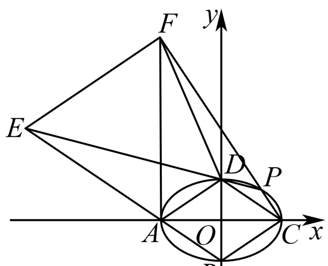
联立 $\begin{cases}y=kx+2\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，整理得 $(4+9k^2)x^2+36kx=0$，因为 $x_D=0$，所以 $x_P=\frac{-36k}{4+9k^2}$，

所以点 $P\left(\frac{-36k}{4+9k^2},\frac{8-18k^2}{4+9k^2}\right)$，所以直线 PC 的方程为 $y=\frac{\frac{8-18k^2}{4+9k^2}}{\frac{-36k}{4+9k^2}-3}(x-3)=\frac{18k^2-8}{27k^2+36k+12}(x-3)$，

令 $x=-3$，所以 $y_F=\frac{16-36k^2}{9k^2+12k+4}=\frac{8-12k}{3k+2}$，所以点 F 为 $\left(-3,\frac{8-12k}{3k+2}\right)$，

由题易知直线 AB 的方程为 $y=-\frac{2}{3}x-2$，直线 AD 的方程为 $y=\frac{2}{3}x+2$.

联立 $\begin{cases}y=-\frac{2}{3}x-2\\ y=kx+2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_E=\frac{-12}{3k+2}\\ y_E=\frac{4-6k}{3k+2}\end{cases}$，所以点 $E\left(\frac{-12}{3k+2},\frac{4-6k}{3k+2}\right)$，



所以 $k_{EF}=\frac{\frac{4-6k}{3k+2}-\frac{8-12k}{3k+2}}{\frac{-12}{3k+2}+3}=\frac{6k-4}{9k-6}=\frac{2}{3}=k_{AD}$，所以 $EF\parallel AD$，所以 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DEF}$.