# 黑龙江省哈尔滨市第三中学校 2025－2026 学年高二上学期期末

# 数学试题

**★祝大家学习生活愉快★**

**注意事项：**

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

**一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，每小题只有一个选项符合要求**

1. 抛物线 $y^2=6x$ 的焦点坐标为

A. $(3,0)$ B. $\left(\frac{3}{2},0\right)$ C. $(0,3)$ D. $\left(0,\frac{3}{2}\right)$

2. 已知随机变量 $\xi$ 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$，且 $P(\xi<0)=0.4$，则 $P(\xi\leqslant 2)=$

A. 0.1 B. 0.2 C. 0.4 D. 0.6

3. 若二项式 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中二项式系数和为 64，那么该展开式中的常数项为

A. 12 B. 15 C. 20 D. 30

4. 若双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的虚轴长为 $2\sqrt{2}$，则该双曲线的渐近线方程为

A. $y=\pm\sqrt{2}x$ B. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ C. $y=\pm 2x$ D. $y=\pm 2\sqrt{2}x$

5. 第二十七届哈尔滨冰雪大世界主塔名为“冰灯启梦”．景观以雪花托举的“山”字为意象，是对冰雪童话世界的诗意呼应，更是借山之坚韧与巍峨，隐喻生态与发展共生共荣的永恒力量．冰雪大世界现招募志愿者，从哈三中的 8 名志愿者中任意选出 3 名，分别负责语言服务、人员引导、应急救助工作，其中甲、乙、丙 3 人不能负责语言服务工作，则不同的选法种数共有

A. 102 种 B. 105 种 C. 210 种 D. 288 种

6. 圆 $C_1:x^2+y^2=25$ 与圆 $C_2:(x-1)^2+(y-a)^2=4(a>0)$ 相交，则 $a$ 的取值范围为

A. $(2,6)$ B. $(3,7)$ C. $(2\sqrt{2},4\sqrt{3})$ D. $(\sqrt{10},5\sqrt{2})$

7. 已知双曲线 $C$：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1$，$F_2$，若双曲线右支上一点 $P$ 满足 $|PF_1|=3|PF_2|$ 且 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，则双曲线 $C$ 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{7}{2}$

8. 手电筒、探照灯的反光镜面都是旋转抛物面(如图1)，是利用抛物线的光学性质原理设计的．根据抛物线的光学性质可知，从抛物线的焦点发出的光线经该抛物线反射后与对称轴平行，一条平行于对称轴的光线经该抛物线反射后会经过抛物线的焦点．如图2所示，从直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 发出的两条光线经抛物线 $y^2=4x$ 两次反射后，两条反射光线之间的宽度为

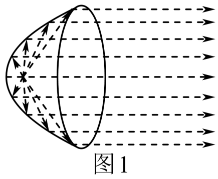


图1

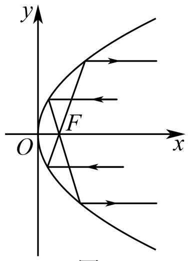


图2

A. 2　　　　B. 4　　　　C. 6　　　　D. 8

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 下列说法正确的是

A. 圆的周长与该圆的直径具有相关关系

B. 当两个变量相关且样本相关系数 $r>0$ 时，表明两个变量正相关

C. 在残差图中，残差点分布的水平带状区域越宽，说明模型的拟合效果越好

D. 依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验推断两个分类变量 $X$ 与 $Y$ 是否有关联，经计算 $\chi^2=4.523>3.841=\chi^2_{0.05}$，可以推断两个变量有关联，犯错误的概率不超过0.05

10. 已知抛物线 $C: y=\frac{1}{2}x^2$ 的焦点为 $F$，过 $F$ 作直线 $l$ 与 $C$ 相交于 $A$，$B$ 两点，则

A. 焦点 $F$ 与 $C$ 的准线的距离为1

B. $|AB|$ 的最小值为2

C. 存在直线 $l$，使得 $OA\perp OB$

D. 若 $M(1,1)$，则 $|AM|+|AF|$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>0,b_2>0)$ 有相同的焦点，且左、右焦点分别为 $F_1$，$F_2$，它们在第一象限的交点为 $P$，若椭圆离心率记为 $e_1$，双曲线离心率记为 $e_2$，则下列结论正确的是

A. 若 $b_1=b_2=1$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为1

B. 若 $a_1=2$，$a_2=\sqrt{2}$，则 $|PF_1||PF_2|=4$

C. 若 $\angle F_1PF_2=\frac{2\pi}{3}$，则 $27e_1^2+e_2^2$ 的最小值为25

D. 若 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，则 $\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}$ 的最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分

12. 三条直线 $2x-ay-1=0$，$x-y=0$，$y=4x-3$ 相交于一点，则 $a=$______.

13. 已知 $F_1$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左焦点，$P$ 为椭圆 $C$ 上任意一点，点 $Q(4,3)$，则 $|PF_1|+|PQ|$ 的最大值是______.

14. 已知 $A(-1,0)$，$B\left(-\frac{5}{2},0\right)$，动点 $P$ 满足 $|PA|=2|PB|$，$O$ 为坐标原点，则 $|PO|$ 最小值为______；过点 $P$ 作抛物线 $y^2=x$ 的两条切线，切点分别为 $M$，$N$，则 $\triangle PMN$ 面积的取值范围是______.

**四、解答题：本题共5小题，共77分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤**

15. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$ 分别为双曲线的左、右焦点.

(1) 求双曲线 $C$ 的标准方程；

(2) 若斜率为 $l$ 的直线 $l$ 过点 $F_2$ 与双曲线 $C$ 交于 $A$，$B$ 两点，求 $\triangle ABF_1$ 的面积.

16. 某自助餐厅为了鼓励消费，设置了一个抽奖箱，箱中放有6折、7折、8折、9折的奖券各2张，每张奖券的大小形状都相同，每位顾客可以从中任取2张奖券，最终餐厅将在结账时按照2张奖券中最优惠的折扣进行结算.

(1) 在一位顾客结账时按照6折结算的条件下，求该顾客抽到的2张奖券的折扣不同的概率；

(2) 若自助餐的原价为100元/位，记一位顾客最终结算时的价格为 $X$，求 $X$ 的分布列及数学期望 $E(X)$.

17. 自2020年以来，某地区人工智能核心产值规模呈快速增长态势，下表给出了近5年该地区的人工智能核心产值规模 $y$(单位：亿元).

| 年份 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | 2024 |
|---|---|---|---|---|---|
| 年份编号 $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 核心产值规模 $y$ | 1.5 | 2.5 | 3.4 | 4.9 | 7.8 |

(1) 若用 $y=bx+a$ 作为回归模型，并已求得 $a=-0.48$，$b=1.5$，$\sum\limits_{i=1}^{5}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2=1.61$，求此模型下的决定系数 $R_1^2$(精确到0.01).

(2) 若用 $y=cd^x$ 作为回归模型，

①求 $c$，$d$ 的值；

②已知该模型下的决定系数 $R_2^2\approx0.96$，请说明哪种回归模型拟合效果更好，并用拟合效果好的模型预测2025年该地区的人工智能核心产值规模.

参考数据：

| $\bar{x}$ | $\bar{y}$ | $\bar{y}^2$ | $\sum\limits_{i=1}^{5}y_i^2$ | $\bar{v}$ | $\sum\limits_{i=1}^{5}x_iv_i$ | $e^{0.058}$ | $e^{0.394}$ | $1.5^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4.02 | 16.16 | 104.91 | 1.24 | 22.54 | 1.1 | 1.5 | 11.4 |

附：(1) 上表中 $v=\ln y$；

(2) 一组数据 $(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，…，$(x_n,y_n)$，其经验回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$，决定系数 $R^2=1-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}$.

18. 已知动点$P$到点$F(2,0)$的距离比到直线$x=-3$的距离小1．设动点$P$的轨迹为曲线$C$.

(1) 求曲线$C$的轨迹方程；

(2) 已知点$Q(3,0)$，过点$Q$作直线$l$与曲线$C$交于$A$，$B$两点，直线$AF$，$BF$分别交$C$于另一点$M$，$N$.

①设直线$AB$的斜率为$k_1$，直线$MN$的斜率为$k_2$，试判断$\frac{k_1}{k_2}$是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由；

②求$\triangle QMN$面积的最小值.

19. 一个动圆$Q$与圆$Q_1$:$x^2+(y-2)^2=1$外切，与圆$Q_2$:$x^2+(y+2)^2=49$内切，设圆心$Q$的轨迹为曲线$C$，过点$Q_1$作斜率为$k$的直线$l$交曲线$C$于$A$，$B$两点.

(1) 求曲线$C$的方程；

(2) 在$y$轴上求异于$Q_1$的点$P$，使得对于任意的直线$l$，都有$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{|Q_1A|}{|Q_1B|}$；

(3) 设$A_1$，$A_2$分别为曲线$C$的上、下顶点，直线$AA_1$与直线$BA_2$交于点$M$，若曲线$C$在点$A$处的切线交$y$轴于点$N$，试判断直线$AB$与直线$MN$的交点$H$是否在一条定直线上？若是，求出该直线方程；若不是，请说明理由.

# 参考答案

1. $B$

【解析】抛物线 $y^2=6x$ 的焦点在 $x$ 的正半轴上，$2p=6$，$p=3$，$\frac{p}{2}=\frac{3}{2}$，所以焦点坐标为 $\left(\frac{3}{2},0\right)$.

2. $D$

【解析】$\because$ 随机变量 $\xi$ 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$，$\therefore P(\xi>2)=P(\xi<0)=0.4$，$\therefore P(\xi\leqslant 2)=1-P(\xi>2)=1-0.4=0.6$.

3. $C$

【解析】$\because \left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中二项式系数和为 $2^n$，$\therefore 2^n=64$，$\therefore n=6$，

设 $T_{r+1}$ 为常数项，则 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_6^r x^{6-r}x^{-r}=C_6^r x^{6-2r}$，

故 $6-2r=0$，解得 $r=3$，则 $T_4=C_6^3=20$.

4. $A$

【解析】由双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的虚轴长为 $2\sqrt{2}$，得 $b=\sqrt{2}$，因为该双曲线的渐近线方程为 $y=\pm bx$，所以该双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$.

5. $C$

【解析】先从 8 名志愿者中任意选出 3 名，分别负责语言服务、人员引导、应急救助工作，共有 $A_8^3=8\times 7\times 6=336$ 种. 其中甲乙丙 3 人有一人负责语言服务工作，有 $C_3^1A_7^2=3\times 7\times 6=126$ 种，故符合条件的选法共有 $336-126=210$ 种.

6. $C$

【解析】因为圆 $C_1: x^2+y^2=25$ 的圆心为 $C_1(0,0)$，半径 $r_1=5$，圆 $C_2: (x-1)^2+(y-a)^2=4(a>0)$ 的圆心为 $C_2(1,a)$，半径 $r_2=2$，所以圆心距 $|C_1C_2|=\sqrt{(0-1)^2+(0-a)^2}=\sqrt{1+a^2}$，又圆 $C_1$ 与圆 $C_2$ 相交，所以 $|r_1-r_2|<|C_1C_2|<r_1+r_2$，即 $3<\sqrt{1+a^2}<7$，又 $a>0$，所以解得：$2\sqrt{2}<a<4\sqrt{3}$.

7. $B$

【解析】由双曲线的定义知，$|PF_1|-|PF_2|=2a$，又 $|PF_1|=3|PF_2|$，所以 $|PF_1|=3a$，$|PF_2|=a$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，$|F_1F_2|=2c$，$\angle F_1PF_2=60^\circ$，由余弦定理得，$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2$，即 $(2c)^2=(3a)^2+a^2-2\cdot 3a\cdot a\cdot\frac{1}{2}$，整理得 $4c^2=7a^2$，即 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{7}{4}$. 所以双曲线的离心率为 $\mathrm{e}=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

8. $D$

【解析】抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 $F(1,0)$，设过点 $F$ 的抛物线弦所在直线方程为 $x=ty+1$，

由 $\begin{cases}x=ty+1\\ y^2=4x\end{cases}$ 消去 $x$ 得 $y^2-4ty-4=0$，设弦的两个端点坐标为 $(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，则 $y_1y_2=-4$，当 $y_1=1$ 时，$y_2=-4$；当 $y_1=-1$ 时，$y_2=4$，因此两条光线第二次反射的反射点的纵坐标分别为 $-4$，$4$，所以两次反射后，两条反射光线之间的宽度为 $4-(-4)=8$.

9. $BD$

【解析】对于 $A$，圆的周长公式为 $C=\pi d$（$C$ 是周长，$d$ 是直径），这是确定的函数关系，

不是相关关系（相关关系是变量间非确定性的关系），所以 $A$ 错误；

对于 $B$，样本相关系数 $r$ 的取值范围是 $[-1,1]$，当 $r>0$ 时，表明两个变量正相关；

当 $r<0$ 时，表明两个变量负相关。所以 $B$ 正确；
对于 $C$，在残差图中，残差点分布的水平带状区域越窄，说明模型对数据的拟合效果越好；
若带状区域越宽，拟合效果越差。所以 $C$ 错误；
对于 $D$，依据独立性检验，当 $\chi^2>\chi_\alpha^2$(这里 $\alpha=0.05$，$\chi_\alpha^2=3.841$) 时，
我们推断“两个分类变量有关联”，且这种推断犯错误的概率不超过 $\alpha=0.05$，
本题中 $\chi^2=4.523>3.841=\chi_{0.05}^2$，符合该规则，所以 $D$ 正确.

10. $ABD$

【解析】对于 $A$，抛物线 $C:y=\frac{1}{2}x^2$，其标准方程为 $x^2=2y$，
其焦点到准线的距离为 $p=1$，$A$ 正确；
对于 $B$，由题意知直线 $l$ 的斜率必存在，设过焦点 $F\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 的直线 $l$ 的方程为 $y=kx+\frac{1}{2}$，设 $A(x_1,y_1)$，$B$
$(x_2,y_2)$，将 $y=kx+\frac{1}{2}$ 代入 $x^2=2y$，可得 $x^2-2kx-1=0$，$\Delta=4k^2+4>0$，
由韦达定理可知 $x_1+x_2=2k$，$x_1x_2=-1$，
$|AB|=y_1+\frac{1}{2}+y_2+\frac{1}{2}=y_1+y_2+1$，又 $y_1=kx_1+\frac{1}{2}$，$y_2=kx_2+\frac{1}{2}$，
则 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+1=2k^2+1$，所以 $|AB|=2k2+1+1=2k2+2$，
因为 $k^2\geqslant 0$，所以当 $k=0$ 时，$|AB|$ 取得最小值 2，选项 $B$ 正确；
对于 $C$，若 $OA\perp OB$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$，
由于 $x_1x_2=-1$，$y_1=\frac{1}{2}x_1^2$，$y_2=\frac{1}{2}x_2^2$，故 $y_1y_2=\frac{1}{4}x_1^2x_2^2=\frac{1}{4}$，
故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}\neq 0$，故不存在直线 $l$，使得 $OA\perp OB$，$C$ 错误；
对于 $D$，因为 $1^2<2\times 1$，故点 $M(1,1)$ 在抛物线内，如图，
设点 $A$ 到准线 $y=-\frac{1}{2}$ 的距离为 $d$，根据抛物线的定义知 $|AF|=d$，
则 $|AM|+|AF|=|AM|+d$，其最小值为点 $M(1,1)$ 到准线 $y=-\frac{1}{2}$ 的距离，
此时过点 $M$ 向准线作垂线，和抛物线的交点即为 $A$ 点，
故点 $M(1,1)$ 到准线 $y=-\frac{1}{2}$ 的距离为 $1-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$，
即得 $|AM|+|AF|$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$，所以选项 $D$ 正确.

11. $ACD$

【解析】由题意知，$a_1^2-b_1^2=a_2^2+b_2^2=c^2$.
设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n(m>n>0)$，
由椭圆定义：$m+n=2a_1$，由双曲线定义：$m-n=2a_2$，
所以 $m=a_1+a_2$，$n=a_1-a_2$.
选项 $A$：若 $b_1=b_2=1$，则 $a_1^2-1=a_2^2+1=c^2$，即 $a_1^2-a_2^2=2$，$4c^2=2(a_1^2-1)+2(a_2^2+1)=2(a_1^2+a_2^2)$.
又 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=m^2+n^2=(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2=2(a_1^2+a_2^2)$，
所以 $\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形，且 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$.
所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}mn=\frac{1}{2}(a_1+a_2)(a_1-a_2)=\frac{1}{2}(a_1^2-a_2^2)=\frac{1}{2}\times 2=1$，故 $A$ 正确.
选项 $B$：若 $a_1=2$，$a_2=\sqrt{2}$，则 $m=2+\sqrt{2}$，$n=2-\sqrt{2}$，
所以 $|PF_1||PF_2|=mn=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=2$，$B$ 错误.

选项 $C$：在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2$，

即 $(2c)^2=(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2-2(a_1+a_2)(a_1-a_2)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，

整理得 $4c^2=3a_1^2+a_2^2$，则 $\dfrac{3}{e_1^2}+\dfrac{1}{e_2^2}=4$.

所以 $27e_1^2+e_2^2=\dfrac{1}{4}(27e_1^2+e_2^2)\left(\dfrac{3}{e_1^2}+\dfrac{1}{e_2^2}\right)=\dfrac{1}{4}\left(82+\dfrac{3e_2^2}{e_1^2}+\dfrac{27e_1^2}{e_2^2}\right)$

$\geqslant\dfrac{1}{4}\left(82+2\sqrt{\dfrac{3e_2^2}{e_1^2}\times\dfrac{27e_1^2}{e_2^2}}\right)=\dfrac{1}{4}(82+2\sqrt{81})=25$，当且仅当 $\dfrac{3e_2^2}{e_1^2}=\dfrac{27e_1^2}{e_2^2}$ 即 $e_2^2=3e_1^2$ 时，等号成立，故 $C$ 正确.

选项 $D$：同理可得，$4c^2=a_1^2+3a_2^2$，即 $\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{3}{e_2^2}=4$.

设 $\dfrac{1}{e_1}=2\cos\alpha$，$\dfrac{\sqrt{3}}{e_2}=2\sin\alpha$，则 $\dfrac{1}{e_1}+\dfrac{1}{e_2}=2\cos\alpha+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\sin\alpha\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

又 $-1\leqslant\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant1$，所以 $-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\leqslant\dfrac{1}{e_1}+\dfrac{1}{e_2}\leqslant\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，故 $D$ 正确.

12. 1

【解析】联立 $\begin{cases}x-y=0\\y=4x-3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，把交点坐标 $(1,1)$ 代入 $2x-ay-1=0$，得 $2\times1-a\times1-1=0$，解得 $a=1$.

13. $6+\sqrt{13}$

【解析】设 $F_2$ 是椭圆 $C$：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右焦点，则 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，$a=3$，$b=\sqrt{5}$.

根据椭圆的定义得 $|PF_1|+|PF_2|=2a=6$，所以 $|PF_1|=6-|PF_2|$.

所以 $|PF_1|+|PQ|=6-|PF_2|+|PQ|=6+(|PQ|-|PF_2|)$.

因为 $|PQ|-|PF_2|\leqslant|QF_2|$，$|QF_2|=\sqrt{(4-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$，

所以 $|PQ|-|PF_2|\leqslant\sqrt{13}$，所以 $|PQ|-|PF_2|$ 的最大值为 $\sqrt{13}$，

故 $|PF_1|+|PQ|$ 的最大值为 $6+\sqrt{13}$.

14. ①. 2 ②. $\left[4\sqrt{2},\dfrac{17\sqrt{17}}{4}\right]$

【解析】设 $P(x,y)$，因为 $|PA|=2|PB|$，$A(-1,0)$，$B\left(-\dfrac{5}{2},0\right)$，

所以 $\sqrt{(x+1)^2+(y-0)^2}=2\sqrt{\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+(y-0)^2}$，

两边平方 $x^2+2x+1+y^2=4\left(x^2+5x+\dfrac{25}{4}+y^2\right)$，

所以 $x^2+2x+1+y^2=4x^2+20x+25+4y^2$，整理得 $x^2+y^2+6x+8=0$，

所以 $(x+3)^2+y^2=1$，所以动点 $P$ 的轨迹为圆心为 $C(-3,0)$，半径为 $r=1$，

又 $|CO|=3$，所以 $|PO|$ 最小值为 $|CO|-r=3-1=2$；

设 $P(x_0,y_0)$，过 $P(x_0,y_0)$ 与抛物线相切的直线斜率显然存在且不为 0，

设切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，与抛物线方程联立可得 $y-y_0=k(y^2-x_0)$，

即 $ky^2-y+y_0-kx_0=0$，所以 $\Delta=(-1)^2-4k(y_0-kx_0)=0$，

即 $4k^2x_0-4ky_0+1=0$，即 $4k^2y_0^2-4ky_0+1=0$，

所以 $(2ky_0-1)=0$，所以 $k=\dfrac{1}{2y_0}$，

所以 $y-y_0=\dfrac{1}{2y_0}(x-x_0)$，即 $2y_0y-y_0^2=x-x_0$，所以 $x-2y_0y+x_0=0$，

直线 $x-2y_0y+x_0=0$ 过切点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

所以切点弦 $MN$ 方程为 $x-2y_0y+x_0=0$，

与抛物线方程联立可得 $y^2-2y_0y+x_0=0$，所以 $y_1+y_2=2y_0$，$y_1y_2=x_0$，

所以 $|MN|=\sqrt{1+(2y_0)^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{1+4y_0^2}\cdot\sqrt{y_0^2-x_0}$.

点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $x-2y_0y+x_0=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|x_0-2y_0^2+x_0|}{\sqrt{1+4y_0^2}\cdot}=\dfrac{|-2y_0^2+2x_0|}{\sqrt{1+4y_0^2}\cdot}$，

所以 $S=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot d=\dfrac{1}{2}\dfrac{|2x_0-2y_0^2|}{\sqrt{1+4y_0^2}\cdot}\cdot 2\sqrt{1+4y_0^2}\cdot\sqrt{y_0^2-x_0}=2(y_0^2-x_0)^{\frac{3}{2}}$，

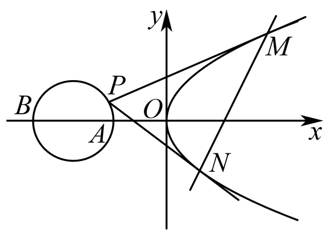
又 $(x_0+3)^2+y_0^2=1$，所以 $S=2[1-(x_0+3)^2-x_0]^{\frac{3}{2}}$，

令 $t=1-(x_0+3)^2-x_0=-\left(x_0+\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{17}{4}$，

又 $(x_0+3)^2\leqslant 1$，所以 $-4\leqslant x_0\leqslant -2$，所以 $2\leqslant t\leqslant\dfrac{17}{4}$，

当 $t=\dfrac{17}{4}$ 时，$S_{\max}=2\left(\dfrac{17}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{17\sqrt{17}}{4}$，当 $t=2$，$S_{\min}=2\times 2^{\frac{3}{2}}=4\sqrt{2}$，

所以 $S\in\left[4\sqrt{2},\dfrac{17\sqrt{17}}{4}\right]$.




15. (1) 因为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $\mathrm{e}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

又因为 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$ 分别为双曲线的左、右焦点，所以 $c=2$，$a=\sqrt{3}$，$b^2=c^2-a^2=1$，

所以双曲线 $C$ 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2) 由题意设直线 $AB$ 方程　为　$x=y+2$，与双曲线方程联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}-y^2=1\\ x=y+2\end{cases}$，消去 $x$ 得 $2y^2-4y-1=0$，

由韦达定理得 $y_1+y_2=2$，$y_1\cdot y_2=-\dfrac{1}{2}$，则 $|AB|=\sqrt{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1\cdot y_2}=2\sqrt{3}$，

点 $F_1$ 到直线 $AB$ 的距离为 $d=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$，所以 $S_{\triangle ABF_1}=\dfrac{1}{2}|AB|d=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$.

16. (1) 从 8 张奖券中任取 2 张，共有 $C_8^2=\dfrac{8\times 7}{2\times 1}=28$ 种可能；

一位顾客结账时按照 6 折结算，即至少抽到一张 6 折券，共有 $C_2^1C_6^1+C_2^2=13$ 种可能.

这 13 种情况中，抽到的 2 张奖券的折扣不同的情况共有 $C_2^1C_6^1=12$ 种.

所以在一位顾客结账时按照 6 折结算的条件下，求该顾客抽到的 2 张奖券的折扣不同的概率为 $\dfrac{12}{13}$.

(2) 由题可知 $X$ 的取值可以是 60，70，80，90.

$P(X=60)=\dfrac{C_2^2+C_2^1C_6^1}{28}=\dfrac{13}{28}$，$P(X=70)=\dfrac{C_2^2+C_2^1C_4^1}{28}=\dfrac{9}{28}$，$P(X=80)=\dfrac{C_2^2+C_2^1C_2^1}{28}=\dfrac{5}{28}$，$P(X=90)$

$=\frac{C_2^2}{28}=\frac{1}{28}$.

所以$X$的分布列为

| $X$ | 60 | 70 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{13}{28}$ | $\frac{9}{28}$ | $\frac{5}{28}$ | $\frac{1}{28}$ |

所以$X$的数学期望$E(X)=60\times\frac{13}{28}+70\times\frac{9}{28}+80\times\frac{5}{28}+90\times\frac{1}{28}=\frac{1900}{28}=\frac{475}{7}$.

17. (1) 由题意可得$\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=\sum\limits_{i=1}^{5}y_i^2-5\bar{y}^2=104.91-5\times4.02^2=104.91-80.802=24.108$，

所以决定系数$R_1^2=1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}=1-\frac{1.61}{24.108}\approx1-0.0668=0.9332\approx0.93$.

(2) 将$y=cd^x$两边取对数，可得$\ln y=\ln c+x\ln d$，

设$v=\ln y$，则模型为$v=a+bx$，其中$a=\ln c$，$b=\ln d$，

因为$\bar{x}=3$，$\bar{v}=1.24$，

所以$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(v_i-\bar{v})=\sum\limits_{i=1}^{5}x_iv_i-5\bar{x}\cdot\bar{v}=22.54-5\times3\times1.24=3.94$

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2=10$，

所以$b=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{3.94}{10}=0.394$，

则$a=\bar{v}-b\bar{x}=1.24-0.394\times3=0.058$，

所以$c=e^a=e^{0.058}\approx1.1$，$d=e^b=e^{0.394}\approx1.5$，

因为该模型下的决定系数$R_2^2\approx0.96$，大于线性模型下的决定系数$R_1^2\approx0.93$，

故指数模型拟合效果更好，

令$x=6$，可得$y=1.1\times1.5^6=1.1\times11.4=12.54$(亿元)，

故预测2025年该地区的人工智能核心产值规模为12.54(亿元).

18. (1) 由题可知，点$P$到点$F(2,0)$的距离与到$x=-2$的距离相等，

所以曲线$C$是以$F$为焦点，直线$x=-2$为准线的抛物线，方程为$y^2=8x$.

(2) ①设$A\left(\frac{y_1^2}{8},y_1\right)$，$B\left(\frac{y_2^2}{8},y_2\right)$，$M\left(\frac{y_3^2}{8},y_3\right)$，$N\left(\frac{y_4^2}{8},y_4\right)$，

由题意可知$AB$的斜率不为0，设直线$AB$的方程为$x=my+3$，

联立得$\begin{cases}x=my+3\\y^2=8x\end{cases}$，消去$x$，得$y^2-8my-24=0$，

显然$\Delta=(-8m)^2-4\times1\times(-24)>0$，所以$y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-24$，

直线$AF$的方程为$y=\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{8}-2}(x-2)$，联立得$\begin{cases}y^2=8x\\y=\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{8}-2}(x-2)\end{cases}$，

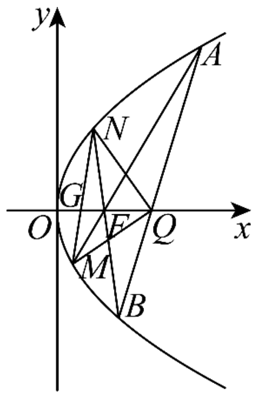
消去$x$，得$\left(\frac{y_1^2}{8}-2\right)y=y_1\left(\frac{y^2}{8}-2\right)$，整理得$y_1y^2-y_1^2y+16y-16y_1=0$，

则 $y_1, y_3$ 是方程的两根，$\Delta=(16-y_1^2)^2-16y_1^2>0$，

所以 $y_1y_3=\frac{-16y_1}{y_1}=-16$，所以 $y_3=\frac{-16}{y_1}$，同理可得 $y_4=\frac{-16}{y_2}$，

$k_2=\frac{y_3-y_4}{\frac{y_3^2}{8}-\frac{y_4^2}{8}}=\frac{8}{y_3+y_4}=\frac{8}{\frac{-16}{y_1}+\frac{-16}{y_2}}=-\frac{1}{2}\times\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=-\frac{1}{2}\times\frac{-24}{8m}=\frac{3}{2m}$，

因为 $k_1=\frac{1}{m}$，所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{2}{3}$




②由①知 $MN$ 的方程为：$y-y_3=\frac{3}{2m}\left(x-\frac{y_3^2}{8}\right)$，所以 $y+\frac{16}{y_1}=\frac{3}{2m}\left[x-\frac{\left(\frac{-16}{y_1}\right)^2}{8}\right]$，

所以 $y+\frac{16}{y_1}=\frac{3}{2m}\left[x-\frac{32}{y_1^2}\right]$，

令 $y=0$，则 $x=\frac{32m}{3y_1}+\frac{32}{y_1^2}=\frac{4(y_1+y_2)}{3y_1}+\frac{32}{y_1^2}=\frac{4}{3}+\frac{4y_2}{3y_1}+\frac{32}{y_1^2}=\frac{4}{3}+\frac{4y_1y_2+96}{3y_1^2}=\frac{4}{3}$，

所以 $MN$ 过定点 $G\left(\frac{4}{3},0\right)$.

所以 $S_{\triangle QMN}=\frac{1}{2}\times|GQ|\times|y_3-y_4|=\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}\times\left|\frac{-16}{y_1}-\frac{-16}{y_2}\right|=\frac{40}{3}\times\left|\frac{y_1-y_2}{y_1y_2}\right|=\frac{40}{3}\times\left|\frac{y_1-y_2}{-24}\right|$

$=\frac{5}{9}\times|y_1-y_2|=\frac{5}{9}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{5}{9}\times\sqrt{64m^2+96}\geqslant\frac{5}{9}\times\sqrt{96}=\frac{20\sqrt{6}}{9}$，

当且仅当 $m=0$ 时，$\triangle QMN$ 面积最小，最小值为 $\frac{20\sqrt{6}}{9}$.

19\. (1) 圆 $Q_1: x^2+(y-2)^2=1$ 的圆心为 $Q_1(0,2)$，半径为 $r_1=1$，

圆 $Q_2: x^2+(y+2)^2=49$ 的圆心为 $Q_2(0,-2)$，半径为 $r_2=7$，

设动圆 $Q$ 的半径为 $r$，

$\because$ 圆 $Q$ 与圆 $Q_1: x^2+(y-2)^2=1$ 外切，与圆 $Q_2: x^2+(y+2)^2=49$ 内切，

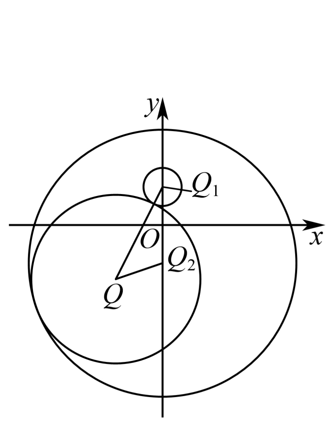
$\therefore |QQ_1|=r+r_1=r+1$，$|QQ_2|=r_2-r=7-r$，

$\therefore |QQ_1|+|QQ_2|=7-r+r+1=8=2a$，$\therefore |Q_1Q_2|=4=2c$，

$\because 2a>2c$，$\therefore Q$ 的轨迹是以 $Q_1(0,2)$，$Q_2(0,-2)$ 为焦点的椭圆，

且 $2a=8$，$2c=4$，即 $a=4$，$c=2$，$\because b^2=a^2-c^2=16-4=12$，

$\therefore Q$ 的轨迹方程为 $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{12}=1$.




(2) $\because$ 在 $y$ 轴上求异于 $Q_1$ 的点 $P$，$\therefore$ 设 $P(0,t)$ $(t\neq2)$，

当 $k=0$ 时，$A$，$B$ 两点关于 $y$ 轴对称，满足 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{|Q_1A|}{|Q_1B|}$，故符合题意；

当 $k\neq 0$ 时，设过点 $Q_1$ 作斜率为 $k$ 的直线 $l$ 的方程为 $y=kx+2$，

将 $y=kx+2$ 代入 $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{12}=1$ 中得到 $\frac{(kx+2)^2}{16}+\frac{x^2}{12}=1$，

整理得 $(3k^2+4)x^2+12kx-36=0$，

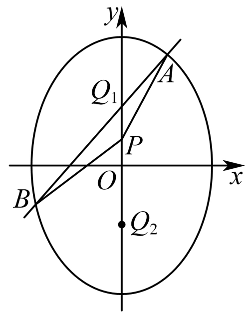
设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{12k}{3k^2+4}\\ x_1x_2=-\frac{36}{3k^2+4}\end{cases}$，

$\because$ 对于任意的直线 $l$，都有 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{|Q_1A|}{|Q_1B|}$，$\therefore PQ_1$ 为 $\angle APB$ 的角平分线，

$\therefore k_{PA}+k_{PB}=0$，

$\because k_{PA}=\frac{y_1-t}{x_1}=\frac{kx_1+2-t}{x_1}$，$k_{PB}=\frac{y_2-t}{x_2}=\frac{kx_2+2-t}{x_2}$，




$\therefore \frac{kx_1+2-t}{x_1}+\frac{kx_2+2-t}{x_2}=0$，$\therefore \frac{(kx_1+2-t)x_2+(kx_2+2-t)x_1}{x_1x_2}=0$，

$\therefore (kx_1+2-t)x_2+(kx_2+2-t)x_1=0$，$\therefore 2kx_1x_2+(2-t)(x_1+x_2)=0$，

$\because \begin{cases}x_1+x_2=-\frac{12k}{3k^2+4}\\ x_1x_2=-\frac{36}{3k^2+4}\end{cases}$，$\therefore 2k\times\left(-\frac{36}{3k^2+4}\right)+(2-t)\left(-\frac{12k}{3k^2+4}\right)=0$，

$\therefore -\frac{72k}{3k^2+4}-\frac{12(2-t)k}{3k^2+4}=0$，$\therefore -72k-12(2-t)k=0$，

$\because k\neq 0$ $\therefore 6+(2-t)=0$，$\therefore t=8$，

综上可知，在 $y$ 轴上存在异于 $Q_1$ 的点 $P(0,8)$，使得对于任意的直线 $l$，都有 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{|Q_1A|}{|Q_1B|}$；

(3) $\because \frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{12}=1$，$A_1$，$A_2$ 分别为曲线 $C$ 的上、下顶点，

$\therefore A_1(0,4)$，$A_2(0,-4)$，设 $A(x_1,y_1)$，

则在点 $A$ 处的切线方程为 $\frac{y_1y}{16}+\frac{x_1x}{12}=1$，

将 $x=0$ 代入 $\frac{y_1y}{16}+\frac{x_1x}{12}=1$，解得 $y=\frac{16}{y_1}$，则 $N\left(0,\frac{16}{y_1}\right)$，

将 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 代入 $y=kx+2$ 得 $y_1=kx_1+2$，$y_2=kx_2+2$，则 $N\left(0,\frac{16}{kx_1+2}\right)$

$\because k_{AA_1}=\frac{y_1-4}{x_1}=\frac{kx_1+2-4}{x_1}=k-\frac{2}{x_1}$，$\therefore$ 直线 $AA_1$ 的方程为 $y=\left(k-\frac{2}{x_1}\right)x+4$，

$\because k_{BA_2}=\frac{y_2+4}{x_2}=\frac{kx_2+2+4}{x_2}=k+\frac{6}{x_2}$，$\therefore$ 直线 $BA_2$ 的方程为 $y=\left(k+\frac{6}{x_2}\right)x-4$，

将 $y=\left(k-\frac{2}{x_1}\right)x+4$ 代入 $y=\left(k+\frac{6}{x_2}\right)x-4$，得 $\left(k+\frac{6}{x_2}\right)x-4=\left(k-\frac{2}{x_1}\right)x+4$，

解得 $\left(k+\frac{6}{x_2}-k+\frac{2}{x_1}\right)x=8$，即 $\left(\frac{6}{x_2}+\frac{2}{x_1}\right)x=8$，

即 $\left(\frac{6x_1+2x_2}{x_1x_2}\right)x=8$，即 $x=\frac{8x_1x_2}{6x_1+2x_2}=\frac{4x_1x_2}{3x_1+x_2}$ 为 $M$ 的横坐标，

将 $x=\frac{4x_1x_2}{3x_1+x_2}$ 代入 $y=\left(k-\frac{2}{x_1}\right)\left(\frac{4x_1x_2}{3x_1+x_2}\right)+4$，

即 $y=\frac{4kx_1x_2-4x_2+12x_1}{3x_1+x_2}=\frac{4kx_1x_2-16x_2+12(x_1+x_2)}{3(x_1+x_2)-2x_2}$，

即 $y=\dfrac{4k\times\dfrac{-36}{3k^2+4}-16x_2+12\times\dfrac{-12k}{3k^2+4}}{3\times\dfrac{-12k}{3k^2+4}-2x_2}$，

即 $y=\dfrac{-288k-16(3k^2+4)\cdot x_2}{-36k-2(3k^2+4)\cdot x_2}$，即 $y=\dfrac{8\times[18k+(3k^2+4)\cdot x_2]}{18k+(3k^2+4)\cdot x_2}=8$ 为 $M$ 的纵坐标，

故 $M\left(\dfrac{4x_1x_2}{3x_1+x_2},8\right)$，$\because N\left(0,\dfrac{16}{kx_1+2}\right)$，

$\therefore k_{MN}=\dfrac{8-\dfrac{16}{kx_1+2}}{\dfrac{4x_1x_2}{3x_1+x_2}}=\dfrac{\dfrac{8(kx_1+2)-16}{kx_1+2}}{\dfrac{4x_1x_2}{3x_1+x_2}}=\dfrac{\dfrac{8kx_1}{kx_1+2}}{\dfrac{4x_1x_2}{3x_1+x_2}}=\dfrac{8kx_1}{kx_1+2}\cdot\dfrac{3x_1+x_2}{4x_1x_2}=\dfrac{2k}{kx_1+2}\cdot\dfrac{3x_1+x_2}{x_2}$

$\therefore k_{MN}=\dfrac{2k(3x_1+x_2)}{kx_1x_2+2x_2}=\dfrac{6kx_1+2kx_2}{kx_1x_2+2x_2}$，

$\because\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{12k}{3k^2+4}\\ x_1x_2=-\dfrac{36}{3k^2+4}\end{cases}$，$\therefore\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{-\dfrac{12k}{3k^2+4}}{-\dfrac{36}{3k^2+4}}=\dfrac{k}{3}$，$\therefore kx_1x_2=3x_1+3x_2$，

$\therefore$ 将 $kx_1x_2=3x_1+3x_2$ 代入 $k_{MN}=\dfrac{6kx_1+2kx_2}{kx_1x_2+2x_2}$，

得 $k_{MN}=\dfrac{6kx_1+2kx_2}{3x_1+3x_2+2x_2}=\dfrac{2k(3x_1+x_2)}{3x_1+5x_2}$，

$\therefore$ 直线 $MN$ 的方程为 $y-\dfrac{16}{kx_1+2}=\dfrac{2k(3x_1+x_2)}{3x_1+5x_2}x$，

$\because$ 直线 $AB$ 的方程为 $y=kx+2$，解得 $x=\dfrac{y-2}{k}$，

$\therefore$ 将 $x=\dfrac{y-2}{k}$ 代入直线 $MN$ 得 $y-\dfrac{16}{kx_1+2}=\dfrac{2k(3x_1+x_2)}{3x_1+5x_2}\cdot\dfrac{y-2}{k}$，

$\therefore y-\dfrac{16}{kx_1+2}=\dfrac{2k(3x_1+x_2)}{3x_1+5x_2}\cdot\dfrac{y-2}{k}$，

$\therefore y-\dfrac{16}{kx_1+2}=\dfrac{2(3x_1+x_2)}{3x_1+5x_2}\cdot y-\dfrac{4(3x_1+x_2)}{3x_1+5x_2}$，

$\therefore\dfrac{4(3x_1+x_2)}{3x_1+5x_2}-\dfrac{16}{kx_1+2}=\left[\dfrac{2(3x_1+x_2)}{3x_1+5x_2}-1\right]\cdot y$，

$\therefore\dfrac{4(3x_1+x_2)(kx_1+2)-16(3x_1+5x_2)}{(3x_1+5x_2)(kx_1+2)}=\dfrac{6x_1+2x_2-3x_1-5x_2}{3x_1+5x_2}\cdot y$，

$\therefore\dfrac{12kx_1^2+24x_1+4kx_1x_2+8x_2-48x_1-80x_2}{(kx_1+2)(3x_1-3x_2)}=y$，

$\therefore\dfrac{12kx_1^2-24x_1+4kx_1x_2-72x_2}{3kx_1^2+6x_1-3kx_1x_2-6x_2}=y$，

$\therefore$ 将 $kx_1x_2=3x_1+3x_2$ 代入 $\dfrac{12kx_1^2-24x_1+4kx_1x_2-72x_2}{3kx_1^2+6x_1-3kx_1x_2-6x_2}=y$，

得 $\dfrac{12kx_1^2-24x_1+4(3x_1+3x_2)-72x_2}{3kx_1^2+6x_1-3(3x_1+3x_2)-6x_2}=y$，

$\therefore\dfrac{12kx_1^2-12x_1-60x_2}{3kx_1^2-3x_1-15x_2}=y$，$\therefore y=4$，

$\therefore$ 直线 $AB$ 与直线 $MN$ 的交点 $H$ 的纵坐标为定值 4，

$\therefore$ 直线 $AB$ 与直线 $MN$ 的交点 $H$ 在定直线 $y=4$ 上.