江苏省南京市金陵中学、姜堰中学、南菁中学、前黄高级中学

2025－2026学年高三上学期12月联考数学试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分，每小题只有一个选项符合要求

1. 设集合 $A=\{x|\ln(x-1)\leqslant 0\}$，$B=\{x|0\leqslant 2x-1\leqslant 2\}$，则 $A\cup B=$

A. $\left\{x\middle|1<x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$　　B. $\{x|x\leqslant 2\}$　　C. $\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}$　　D. $\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$

2. 若 $\frac{z}{z-1}=2+\mathrm{i}$（i为虚数单位），则复数 z 的虚部为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

3. 设点 A，B，C 不共线，则“$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为锐角”是“$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=14$，$a_2=\frac{1}{2}$，记 S_n 为其前 n 项和，则 $S_3=$

A. $\frac{7}{4}$　　B. $\frac{7}{2}$　　C. 7　　D. 14

5. 已知实数 x，y 满足 $3x^2+3xy+y^2=3$，则 $2x+y$ 最大值为

A. 2　　B. 3　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

6. 若函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x)+f(x)-\sin x=0$，且 $f(\pi)=0$，则 $f(2\pi)=$

A. $\frac{1}{2\pi}$　　B. $-\frac{1}{2\pi}$　　C. $\frac{1}{\pi}$　　D. $-\frac{1}{\pi}$

7. 蒙日是法国著名的数学家，他首先发现椭圆的两条相互垂直的切线的交点的轨迹是圆，这个圆被称为“蒙日圆”. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点在 x 轴上，A，B 为椭圆上任意两点，动点 P 在直线 $x-\sqrt{2}y-6=0$ 上. 若 $\angle APB$ 恒为锐角，根据蒙日圆的相关知识得椭圆 C 的离心率的取值范围为

A. $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　B. $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$　　C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},1\right)$

8. 函数 $f(x)=2\sin\omega x(\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x)(\omega>0)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增，且对任意的实数 a，$f(x)$ 在 $(a,a+\pi)$ 上不单调，则 ω 的取值范围为

A. $\left(1,\frac{5}{2}\right]$　　B. $\left(1,\frac{5}{4}\right]$　　C. $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$　　D. $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，则

A. 若$b\cos A=a\cos B$，则$\triangle ABC$为等腰三角形

B. 若$a^2+b^2>c^2$，则$\triangle ABC$为锐角三角形

C. 在锐角三角形ABC中，不等式$\sin A>\cos B$恒成立

D. 若$B=\dfrac{\pi}{4}$，$a=2$，且该三角形有两解，则b的范围是$(\sqrt{2},2)$

10. 已知定义在R上的函数$f(x)$不是奇函数，且$\exists x\in R$，$f(-x)=-f(x)$，则

A. $f(0)\neq 0$

B. $\exists x\in R$，$f(-x)\neq -f(x)$

C. $f(x)$的解析式可以是$f(x)=|x-2|-1$

D. 若$f(x)$的解析式是$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+a, & x\geqslant 0\\ x, & x<0\end{cases}$，则实数$a$的最小值为$-\dfrac{1}{4}$

11. 在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是矩形，$AD=2\sqrt{2}$，$AP=AB=PD=2$，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，点M在线段PC上运动(不含端点)，则

A. 存在点M使得$BD\perp AM$

B. 四棱锥$P-ABCD$外接球的表面积为12π

C. 直线PC与直线AD所成角为$\dfrac{\pi}{3}$

D. 当动点M到直线BD的距离最小时，过点A，D，M作截面交PB于点N，则四棱锥$P-ADMN$的体积是1

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分

12. 已知$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，且$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，则$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$______.

13. 已知圆O的半径为2，点A，B在圆O上，点C在圆O内，且$AB=OC=1$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的最小值为______.

14. 已知数列$\{a_n\}$中$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+\dfrac{n+2}{n^2+n}$，正项数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，且$a_n+b_n^2=2^n$，若$\lambda<T_{2025}$，则$\lambda$的最大整数值为______.

四、解答题：本题共5小题，共77分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

15. 在$\triangle ABC$中，$\sqrt{3}a\sin B=b(1+\cos A)$.

(1) 求$\angle A$；

(2) 若$c=6$，$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$，点D在边BC上且$BD=2DC$，求线段AD的长.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{a_n(a_n+1)}{2}$，且 $a_n>0$.

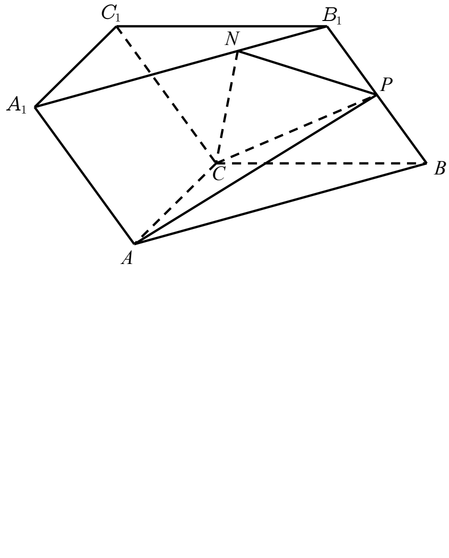
(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

(2) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

17. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle A_1AC=\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle CC_1B_1=\dfrac{\pi}{3}$，$BC=CC_1=2$，$P$ 为棱 BB_1 的中点，N 为棱 A_1B_1 上的一点.

(1) 求证：$CC_1\perp$ 平面 ACP；

(2) 若平面 NCP 与平面 ACP 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，求线段 A_1N 的长.



18. 已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，短轴长为4，椭圆上的点到两个焦点的距离之和为$4\sqrt{3}$. 设椭圆$E$的左右顶点为$A$，$B$，直线$l$交椭圆$E$于$M$，$N$两点(不与$A$，$B$重合)，设直线$AM$的斜率为$k_1$，直线$BN$的斜率为$k_2$，且$3k_1-k_2=0$.

(1) 求椭圆方程；

(2) 求证：直线MN过定点；

(3) 弦MN的中点为H，直线OH与椭圆交于P，Q两点，求四边形$MPNQ$面积S的取值范围.

19. 已知函数$f(x)=\dfrac{2e^x}{a}-x(a\neq 0)$.

(1) 讨论$f(x)$的单调性；

(2) 若对于任意的$x\in R$，$e^x f(x)+a\geqslant 0$恒成立，求a的最大值；

(3) 证明：$(1+n)^n>n!e^{\frac{n}{2}}(n\in N^*)$.

参考答案

1. C

【解析】$\ln(x-1)\leqslant 0=\ln 1\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0\\x-1\leqslant 1\end{cases}$，则 $A=\{x|1<x\leqslant 2\}$，又 $B=\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$，

则 $A\cup B=\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}$.

2. B

【解析】由 $\frac{z}{z-1}=2+\mathrm{i}$，得 $1+\frac{1}{z-1}=2+\mathrm{i}$，即 $z=\frac{1}{1+i}+1=\frac{1-i}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}+1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，其虚部为 $-\frac{1}{2}$.

3. C

【解析】$\because A$、B、C 三点不共线，$\therefore$

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$

$\Leftrightarrow|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|2>|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|2\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$

的夹角为锐角. 故“$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为锐角”是“$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$”的充分必要条件.

4. B

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $a_1=\frac{a_2}{q}=\frac{1}{2q}$，$a_3=a_2q$；

将 $a_1=\frac{a_2}{q}=\frac{1}{2q}$，$a_2=\frac{1}{2}$，$a_3=a_2q$ 代入 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=14$ 中，得 $2q+2+\frac{2}{q}=14$，化简得 $q+\frac{1}{q}=6$；

所以 $S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{a_2}{q}+a_2+a_2q=a_2\left(\frac{1}{q}+1+q\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}+1+q\right)=\frac{7}{2}$.

5. A

【解析】解法 (1)：由 $3x^2+3xy+y^2=3\Rightarrow 3\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{1}{4}y^2=3$，

令 $x+\frac{y}{2}=\cos\theta$，$\frac{y}{2}=\sqrt{3}\sin\theta$，即 $x=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$，$y=2\sqrt{3}\sin\theta$，

$\therefore 2x+y=2\cos\theta\leqslant 2$，即 $2x+y$ 最大值为 2；

解法 (2)：$(2x+y)^2=4x^2+4xy+y^2=3+x^2+xy=3+x(x+y)\leqslant 3+\frac{(2x+y)^2}{4}$，

当且仅当 $x=x+y$，即 $y=0$，$x^2=1$ 时取等号，

$\therefore(2x+y)^2\leqslant 4$，$\therefore -2\leqslant 2x+y\leqslant 2$，即 $2x+y$ 最大值为 2.

6. D

【解析】因为 $xf'(x)+f(x)-\sin x=0$，所以 $[xf(x)]'=\sin x$，

所以 $xf(x)=-\cos x+C$，因为 $f(\pi)=0$，

所以 $\pi f(\pi)=-\cos\pi+C=0$，解得 $C=-1$，

所以 $xf(x)=-\cos x-1$，令 $x=2\pi$，可得 $2\pi f(2\pi)=-\cos 2\pi-1$，解得 $f(2\pi)=-\frac{1}{\pi}$.

7. B

【解析】$\because$ 椭圆 C 的焦点在 x 轴上，$\therefore m>3$，

$\because$ 直线 $x=\pm\sqrt{m}$，$y=\pm\sqrt{3}$ 与椭圆 C 都相切，

$\therefore x=\pm\sqrt{m}$，$y=\pm\sqrt{3}$ 所围成矩形的外接圆 $x^2+y^2=3+m$ 即为椭圆 $C:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{3}=1$ 的蒙日圆，

$\because A,B$ 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上任意两个动点，动点 P 满足 $\angle APB$ 为锐角，

$\therefore$ 点 P 在圆 $x^2+y^2=3+m$ 外，又动点 P 在直线 $x-\sqrt{2}y-6=0$ 上，$\therefore$ 直线 $x-\sqrt{2}y-6=0$ 与圆 $x^2+y^2=3+m$ 相离，$\therefore \dfrac{|-6|}{\sqrt{1+2}}>\sqrt{3+m}$，解得：$m<9$，

又 $m>3$，$\therefore 3<m<9$；

$\because$ 椭圆 C 离心率 $e=\sqrt{\dfrac{m-3}{m}}=\sqrt{1-\dfrac{3}{m}}$，$\dfrac{3}{m}\in\left(\dfrac{1}{3},1\right)$，$\therefore e\in\left(0,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

8. D

【解析】因为 $f(x)=2\sin\omega x(\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x)=2\sqrt{3}\sin^2\omega x+2\sin\omega x\cos\omega x=\sin 2\omega x-\sqrt{3}\cos 2\omega x+\sqrt{3}=2\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$，

又因为 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，且 $\omega>0$，则 $2\omega x-\dfrac{\pi}{3}\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\omega\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$，若 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增，所以 $\dfrac{2\omega\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，所以 $0<\omega\leqslant\dfrac{5}{4}$，因为对任意的实数 a，$f(x)$ 在 $(a,a+\pi)$ 上不单调，所以 $f(x)$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{2\omega}<2\pi$，所以 $\omega>\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{1}{2}<\omega\leqslant\dfrac{5}{4}$.

9. ACD

【解析】对于 A，因为 $b\cos A=a\cos B$，

所以由正弦定理得 $\sin B\cos A=\sin A\cos B$，$\therefore \sin(B-A)=0$，

又 A,B 为 $\triangle ABC$ 的内角，$\therefore B-A\in(-\pi,\pi)$，则 $B-A=0$，即 $B=A$，故 A 正确；

对于 B，由余弦定理可得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$，则角 C 为锐角，不能得到 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 B 错误；

对于 C，因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以 $0<C<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{2}<\pi-C=A+B<\pi$，

又 $A,B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $0<\dfrac{\pi}{2}-B<A<\dfrac{\pi}{2}$，

又因为 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，所以 $\sin A>\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$，$C$ 正确；

对于 D，因为 $B=\dfrac{\pi}{4}$，$a=2$，且该三角形有两解，

所以 $a\sin B<b<a$，即 $\sqrt{2}<b<2$，故 D 正确.

10. BD

【解析】对于 A，因为函数 $f(x)$ 不是奇函数，且 $\exists x\in R$，$f(-x)=-f(x)$，

所以无法判断 $f(0)\neq 0$ 是否成立，

例如：设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ x, & x<0\end{cases}$，显然 $f(x)$ 不是奇函数，且存在 $f(-1)=-1=-f(1)$，

但 $f(0)=0$，故 A 错误；

对于 B，因为函数 $f(x)$ 不是奇函数，所以 $\exists x\in R$，$f(-x)\neq -f(x)$，故 B 正确；

对于 C，若 $f(x)=|x-2|-1$，令 $f(-x)=-f(x)$，

即 $|-x-2|-1=-|x-2|+1$，即 $|x+2|+|x-2|=2$，

当 $x<-2$ 时，方程化为 $-x-2-x+2=2$，解得 $x=-1$（舍去）；

当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，方程化为 $x+2-x+2=2$，无实数解；

当 $x>2$ 时，方程化为 $x+2+x-2=2$，解得 $x=1$（舍去）.

综上，不存在 $x\in R$，$f(-x)=-f(x)$，故 C 错误；

对于 D，函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+a, & x\geqslant 0\\ x, & x<0\end{cases}$ 显然不是奇函数，

若 $\exists x\in R$，$f(-x)=-f(x)$，

当 $x>0$ 时，$-x<0$，则 $f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow -x=x^2-2x-a\Leftrightarrow a=x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，得 $a\geqslant-\frac{1}{4}$，

当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow -(-x)^2-2x+a=-x\Leftrightarrow a=x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，得 $a\geqslant -\frac{1}{4}$，

当 $x=0$ 时，则 $f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow a=-a$，得 $a=0$，

综上，$a\geqslant-\frac{1}{4}$，故实数 a 的最小值为 $-\frac{1}{4}$，故 D 正确.

11. BCD

【解析】如图 1，取 AD 的中点 G，连接 GC，PG，BD，$GC\cap BD=H$，则 $PG\perp AD$，

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PG\subset$ 平面 PAD，

所以 $PG\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，则 $PG\perp BD$.

又因为 $\tan\angle ADB\tan\angle DGC=\frac{AB}{AD}\cdot\frac{CD}{GD}=1$，所以 $GC\perp BD$，

又 $PG\cap GC=G$，PG，$GC\subset$ 平面 PGC，所以 $BD\perp$ 平面 PGC.

因为 $M\in$ 平面 PGC，$A\notin$ 平面 PGC，所以 $BD\perp AM$ 不成立，A 错误.

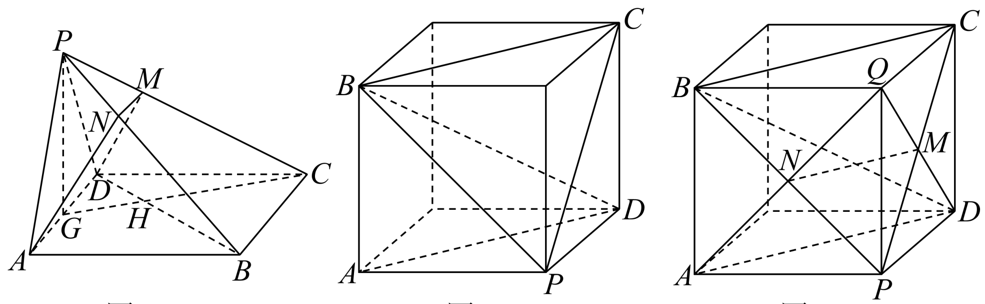


图 1　　图 2　　图 3

因为 $\triangle APD$ 为等腰直角三角形，将四棱锥　的　侧面 APD 作为底面一部分，补成棱长为 2 的正方体.

如图 2，则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球即为正方体的外接球，其半径 $R=\sqrt{3}$，

即四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的表面积为 $4\pi\times3=12\pi$，B 正确.

如图 2，直线 PC 与直线 AD 所成角即为直线 PC 与直线 BC 所成角，

而 $\triangle PBC$ 是正三角形，故该夹角为 $\frac{\pi}{3}$，C 正确.

如图 1，因为 $BD\perp$ 平面 PGC，当动点 M 到直线 BD 的距离最小时 $HM\perp PC$，

由上推导知 $PG\perp GC$，$GC=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$，$\cos\angle DCG=\frac{DC}{CG}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$CH=DC\cos\angle DCG=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$GH=GC-CH=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$PH=\sqrt{PG^2+GH^2}=\sqrt{(\sqrt{2}^2)+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$PH=CH$，

因此 M 为 PC 的中点，如图 3，由 M 为 PC 的中点，即为 QD 中点，

平面 ADM 即平面 ADQ 与 BP 的交点也即为 QA 与 BP 的交点，可知 N 为 QA 的中点，

故 $V_{P-ADMN}=\frac{3}{4}V_{P-AQD}=\frac{3}{4}V_{Q-APD}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)\times2=1$，$D$ 正确.

12. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

【解析】由 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 且 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，得 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{3}{5}$，

则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

13. $-\frac{1}{2}$

【解析】因为 $OA=OB=2$，$AB=1$，所以 $\cos\angle AOB=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2OA\cdot OB}=\frac{7}{8}$，

又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}^2$

$=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OC}-2\times2\times\frac{7}{8}+4=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}=1\times1\times\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}\rangle+\frac{1}{2}$

$=\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}\rangle+\frac{1}{2}\geqslant-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，

当且仅当 $\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}\rangle=180^\circ$ 时取等号，

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$.

14. 88

【解析】已知 $a_1=1$，递推关系 $a_{n+1}=2a_n+\frac{n+2}{n(n+1)}$，即 $\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}$，移项可得：$a_{n+1}+\frac{1}{n+1}=2\left(a_n+\frac{1}{n}\right)$，

设 $c_n=a_n+\frac{1}{n}$，即 $c_{n+1}=2c_n$，所以 $\{c_n\}$ 是首项为 $c_1=a_1+\frac{1}{1}=1+1=2$，公比为 2 的等比数列，

$c_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$.

因此，$a_n=c_n-\frac{1}{n}=2^n-\frac{1}{n}$. 又因为 $a_n+b_n^2=2^n$，则 $b_n^2=2^n-a_n=2^n-\left(2^n-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$，

又因为 $\{b_n\}$ 是正项数列，故 $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$，

由于放缩法：$\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(k>0$ 且 $k\in Z)$，

证明如下：因为 $k>0$，所以 $\sqrt{k+1}>\sqrt{k}$，则 $\sqrt{k+1}+\sqrt{k}>\sqrt{k}+\sqrt{k}=2\sqrt{k}$，

由于 $\sqrt{k+1}+\sqrt{k}>2\sqrt{k}>0$，所以 $\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{2}>\sqrt{k}$，

则 $\frac{1}{\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{2}}<\frac{1}{\sqrt{k}}$，即 $2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{1}{\sqrt{k}}$.

综上，不等式 $\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\,(k>0)$ 成立；同理可证得 $\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$.

所以当 $k\geqslant2$ 时，$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sum_{k=2}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})=2(\sqrt{n}-\sqrt{1})$，

因此 $T_n=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<1+2(\sqrt{n}-1)=2\sqrt{n}-1$；

当 $n=2025$ 时，$\sqrt{2025}=45$，故 $T_{2025}<2\times45-1=89$.

当 $k\geqslant1$ 时：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})$，

当 $n=2025$ 时，$T_{2025}>2(\sqrt{2026}-1)>2(\sqrt{2025}-1)=2\times(45-1)=88$.

所以 $88 < T_{2025} < 89$，

因此，满足 $\lambda < T_{2025}$ 的最大整数 λ 为 88.

15. (1) 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得：$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$，可得 $a\sin B = b\sin A$，

又 $\sqrt{3}\,a\sin B = b(1+\cos A)$，所以 $\sqrt{3}\,b\sin A = b(1+\cos A)$，

所以 $\sqrt{3}\sin A - \cos A = 1$，即 $\sin\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

因为 $A \in (0,\pi)$，所以 $A-\dfrac{\pi}{6} \in \left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5}{6}\pi\right)$，所以 $A-\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$，可得 $A = \dfrac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$，$c=6$，由 (1) 知 $A = \dfrac{\pi}{3}$，

所以 $\dfrac{1}{2}\cdot b \times 6\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{9}{2}\sqrt{3}$，得 $b=3$，

所以 $BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 27$，可得 $BC = 3\sqrt{3}$，

所以 $AC^2 + BC^2 = AB^2$，所以 $C = \dfrac{\pi}{2}$.

在直角 $\triangle ACD$ 中，$CD = \dfrac{1}{3}BC = \sqrt{3}$，$AC = 3$，

可得 $AD = \sqrt{AC^2+CD^2} = 2\sqrt{3}$.

16. (1) 由题意可知，当 $n=1$ 时，$S_1 = a_1 = \dfrac{a_1(a_1+1)}{2}$，因为 $a_n > 0$，解得 $a_1 = 1$，

当 $n \geqslant 2$ 时，$S_n - S_{n-1} = a_n = \dfrac{a_n(a_n+1)}{2} - \dfrac{a_{n-1}(a_{n-1}+1)}{2}$，化简得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$，

因为 $a_n > 0$，所以 $a_n + a_{n-1} > 0$，则 $a_n - a_{n-1} - 1 = 0$，即 $a_n - a_{n-1} = 1$，

可知数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列.

(2) 由 (1) 可知，$a_n = n$，则 $b_n = \dfrac{n}{2^n}$，

则 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \cdots + \dfrac{n}{2^n}$，

则 $\dfrac{1}{2}T_n = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{2}{2^3} + \dfrac{3}{2^4} + \cdots + \dfrac{n-1}{2^n} + \dfrac{n}{2^{n+1}}$，

可得 $T_n - \dfrac{1}{2}T_n = \dfrac{1}{2}T_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{n}{2^{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} - \dfrac{n}{2^{n+1}}$，

解得 $T_n = 2 - \dfrac{2+n}{2^n}$.

17. (1) 因为 $\angle A_1AC = \dfrac{\pi}{2}$，所以侧面 AA_1C_1C 为矩形，故 $AC \perp CC_1$，又 $\angle ACB = \dfrac{\pi}{2}$，即 $AC \perp BC$，且 $BC \cap CC_1 = C$，BC，$CC_1 \subset$ 平面 CC_1B_1B，所以 $AC \perp$ 平面 CC_1B_1B，而 $B_1B \subset$ 平面 CC_1B_1B，故 $AC \perp B_1B$，又 $BC = CC_1$，$\angle B_1BC = \angle CC_1B_1 = \dfrac{\pi}{3}$，故 $\triangle BCB_1$ 为等边三角形，所以 $B_1C = BC$，因为 P 是线段 BB_1 的中点，故 $BB_1 \perp CP$，且 $AC \cap CP = C$，AC，$CP \subset$ 平面 ACP，故 $BB_1 \perp$ 平面 ACP，因为 $AP \subset$ 平面 ACP，故 $BB_1 \perp AP$，又 $BB_1 \parallel CC_1$，所以 $CC_1 \perp$ 平面 ACP.

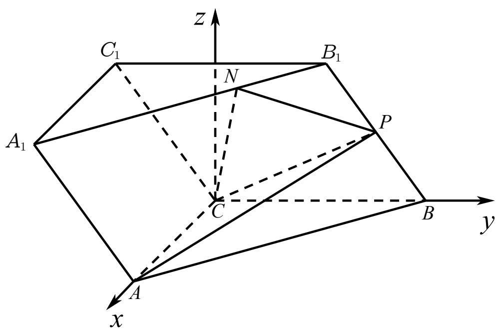
(2) 由 (1) 知，$AC \perp$ 平面 CC_1B_1B，又 $AC \subset$ 平面 ABC，

故平面 $CC_1B_1B \perp$ 平面 ABC，

以 C 为原点，CA，CB 所在直线分别为 x，y 轴，

过点 C 在平面 CC_1B_1B 内作垂直 CB 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，

由 (1) 知 $\triangle BCB_1$ 为等边三角形，故 $\triangle C_1CB_1$ 为等边三角形，且 $B_1C_1 \perp z$ 轴，



所以 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$B_1(0,1,\sqrt{3})$，$C_1(0,-1,\sqrt{3})$，$P\left(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$A_1(2,-1,\sqrt{3})$，设 $N(a,b,c)$，$\overrightarrow{A_1N}=\lambda\overrightarrow{A_1B_1}$，$\lambda\in[0,1]$，

则 $(a-2,b+1,c-\sqrt{3})=\lambda(-2,2,0)$，解得 $a=2-2\lambda$，$b=2\lambda-1$，$c=\sqrt{3}$，

故 $N(2-2\lambda,2\lambda-1,\sqrt{3})$，

易得平面 ACP 的一个法向量为 $\overrightarrow{BB_1}=(0,-1,\sqrt{3})$，

设平面 NCP 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CN}=(2-2\lambda)x+(2\lambda-1)y+\sqrt{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CP}=\frac{3}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$，

令 $y=\lambda-1$，则 $\vec{n}=(\lambda-2,\lambda-1,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$.

记平面 NCP 与平面 ACP 夹角为 θ，

故 $\cos\theta=\left|\cos\vec{n},\overrightarrow{BB_1}\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BB_1}\right|}=\frac{|(\lambda-2,\lambda-1,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)\cdot(0,-1,\sqrt{3})|}{2\times\sqrt{5\lambda^2+8}}=\frac{|4-4\lambda|}{2\sqrt{5\lambda^2-12\lambda+8}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

整理得 $15\lambda^2-28\lambda+12=0$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$ 或 $\lambda=\frac{6}{5}$(舍去)，

所以 $A_1N=\frac{2}{3}A_1B_1=\frac{2}{3}AB=\frac{2}{3}\sqrt{AC^2+BC^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

18. (1) 由题意可得 $2b=4$，则 $b=2$，$2a=4\sqrt{3}$，则 $a=2\sqrt{3}$，所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2) 连接 MB，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，而 $A(-2\sqrt{3},0)$，$B(2\sqrt{3},0)$，

因为 $\frac{x_1^2}{12}+\frac{y_1^2}{4}=1$，所以 $x_1^2-12=-3y_1^2$，

则 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{y_1}{x_1+2\sqrt{3}}\cdot\frac{y_1}{x_1-2\sqrt{3}}=\frac{y_1^2}{x_1^2-12}=\frac{y_1^2}{-3y_1^2}=-\frac{1}{3}$，

因为 $k_{BN}=3k_{MA}$，所以 $k_{BN}\cdot k_{BM}=-1$，

设直线 MN 的方程为 $x=my+t$，

则 $\begin{cases}x=my+t\\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得 $(m^2+3)y^2+2mty+t^2-12=0$，

$\Delta=4m^2t^2-4(m^2+3)(t^2-12)=48m^2-12t^2+144>0$，

$y_1+y_2=-\frac{2mt}{m^2+3}$，$y_1y_2=\frac{t^2-12}{m^2+3}$，

则 $k_{BN}\cdot k_{BM}=\frac{y_1}{x_1-2\sqrt{3}}\cdot\frac{y_2}{x_2-2\sqrt{3}}=\frac{y_1y_2}{(my_1+t-2\sqrt{3})(my_2+t-2\sqrt{3})}=-1$，

化简可得 $(1+m^2)y_1y_2+m(t-2\sqrt{3})(y_1+y_2)+(t-2\sqrt{3})^2=0$，

所以 $(1+m^2)\cdot\dfrac{t^2-12}{m^2+3}+m(t-2\sqrt{3})\cdot\dfrac{-2mt}{m^2+3}+(t-2\sqrt{3})^2=0$，

因为 $t\neq 2\sqrt{3}$，所以 $(1+m^2)(t+2\sqrt{3})-2m^2t+(t-2\sqrt{3})(m^2+3)=0$，解得 $t=\sqrt{3}$，

所以直线 MN 的方程为 $x=my+\sqrt{3}$，故恒过定点 $(\sqrt{3},0)$.

(3) 因为 $k_{OH}\cdot k_{MN}=-\dfrac{1}{3}$，所以 $k_{OH}=-\dfrac{m}{3}$，

设直线 OH 的方程为 $y=-\dfrac{m}{3}x$，即 $mx+3y=0$，

则 $\begin{cases} mx+3y=0 \\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，得 $\left(1+\dfrac{m^2}{3}\right)x^2=12$，故 $|x_P|=|x_Q|=\dfrac{6}{\sqrt{m^2+3}}$，

则 $M(x_1,y_1)$ 到 PQ 的距离为 $d_1=\dfrac{|mx_1+3y_1|}{\sqrt{m^2+9}}$，

$N(x_2,y_2)$ 到 PQ 的距离为 $d_2=\dfrac{|mx_2+3y_2|}{\sqrt{m^2+9}}$，

且 mx_1+3y_1 与 mx_2+3y_2 异号，

故 $|PQ|=\sqrt{1+\dfrac{m^2}{9}}\cdot\dfrac{12}{\sqrt{m^2+3}}=\dfrac{4\sqrt{m^2+9}}{\sqrt{m^2+3}}$，

所以 $S=S_{\triangle MPQ}+S_{\triangle NPQ}=\dfrac{1}{2}|PQ||d_1+d_2|=\dfrac{1}{2}\dfrac{4\sqrt{m^2+9}}{\sqrt{m^2+3}}\dfrac{|mx_1+3y_1-mx_2-3y_2|}{\sqrt{m^2+9}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{m^2+3}}|m(my_1+t)+3y_1-m(my_2+t)-3y_2|=2\sqrt{m^2+3}|y_1-y_2|$，

由 (2) 可知 $\Delta=12(4m^2+9)$，

所以 $S=2\sqrt{m^2+3}\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{4m^2+9}}{m^2+3}=4\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{4m^2+9}{m^2+3}}=4\sqrt{3}\sqrt{4-\dfrac{3}{m^2+3}}$，$m^2\geqslant 0$，

所以 $S\geqslant 4\sqrt{3}\times\sqrt{3}=12$ 且 $S<4\sqrt{3}\times 2=8\sqrt{3}$，

所以 S 的取值范围为 $[12,8\sqrt{3})$.

19. (1) $f'(x)=\dfrac{2e^x}{a}-1$，当 $a<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 R 上单调递减，当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=\ln\dfrac{a}{2}$，当 $x<\ln\dfrac{a}{2}$ 时，$f'(x)<0$，故函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\ln\dfrac{a}{2}\right)$ 单调递减；当 $x>\ln\dfrac{a}{2}$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\ln\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

(2) $\dfrac{2e^{2x}}{a}-xe^x+a\geqslant 0$ 对 $\forall x\in R$ 恒成立，

当 $a<0$ 时，$x\to+\infty$ 时，左边 $\to-\infty$ 与条件矛盾，舍去，$\therefore a>0$，

令 $e^x=t$，$t>0$，$\therefore \dfrac{2t^2}{a}-t\ln t+a\geqslant 0$，即 $2t-a\ln t+\dfrac{a^2}{t}\geqslant 0$ 对 $\forall t>0$ 恒成立，

令 $\varphi(t)=2t-a\ln t+\dfrac{a^2}{t}$，$\varphi'(t)=2-\dfrac{a}{t}-\dfrac{a^2}{t^2}=\dfrac{2t^2-at-a^2}{t^2}=\dfrac{(2t+a)(t-a)}{t^2}$，

当 $t\in(0,a)$ 时，$\varphi'(t)<0$，$t\in(a,+\infty)$ 时，$\varphi'(t)>0$，

所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减；$(a,+\infty)$ 单调递增，

故只需 $\varphi(t)_{\min}=\varphi(a)=3a-a\ln a\geqslant 0\Rightarrow 0<a\leqslant e^3$，$\therefore a_{\max}=e^3$.

(3) 要证：$(1+n)^n>n!e^{\frac{n}{2}}\Leftrightarrow$ 证：$n\ln(1+n)>\dfrac{n}{2}+\ln n!=\dfrac{n}{2}+\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n$

即证：$\sum\limits_{k=1}^{n}[k\ln(1+k)-(k-1)\ln k]>\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2}+\ln k\right)$，

只需证：$k\ln(1+k)-(k-1)\ln k>\frac{1}{2}+\ln k$，$k\in N^*$，

即证：$k\ln(1+k)-k\ln k>\frac{1}{2}$，$k\in N^*$，即证：$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)>\frac{1}{2k}$，$k\in N^*$，

令 $\frac{1}{k}=x$，$x\in(0,1]\Leftrightarrow$ 证：$\ln(1+x)-\frac{x}{2}>0$，$x\in(0,1]$，

令 $F(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{2}$，$F'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\geqslant 0$，$\therefore F(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

$\therefore F(x)>F(0)=0$，证毕.